**UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas**

**IMECC - Instituto de Matemática e Estatística e Computação Científica**

Disciplina MA111 - Cálculo 1

EXAME - 14/12/2012 - GABARITO

*Prof$^o$ Angelo Aliano*

Nome: RA: Turma:

Pontuação obtida

| Questão | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

***Respostas não justificadas serão desconsideradas***

1. Seja $f(x) = \left[\ln\left(\frac{3}{\pi}x\right)\right]^{\sin(2x)}$. Determine:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$;

   *Resolução:* seja $y = \lim_{x\to 0} f(x)$. Então

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln \lim_{x\to 0}\left[\ln\left(\frac{3}{\pi}x\right)\right]^{\sin(2x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \ln \left[\ln\left(\frac{3}{\pi}x\right)\right]^{\sin(2x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \left[\sin(2x)\cdot \ln\left|\ln\left(\frac{3}{\pi}x\right)\right|\right] \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln\left|\ln\left(\frac{3}{\pi}x\right)\right|}{\frac{1}{\sin(2x)}} \qquad [\textit{e aplicando L'Hospital}] \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\frac{3}{\pi}}{\ln\left(\frac{3}{\pi}x\right)}\frac{1}{\frac{3}{\pi}x}}{\frac{-2\cos(x)}{\sin^2(2x)}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x)}{-2\cos(2x)\cdot x\cdot \ln\left(\frac{3}{\pi}x\right)} \\
&= 0 \qquad (1)
\end{aligned}$$

   onde no último limite notamos que $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(2x)}{x} = 0$ (isto é obtido usando-se o primeiro limite fundamental trigonométrico). Alternativamente, você poderia ter usado a Regra de L'Hospital novamente. Logo, $\lim_{x\to 0} f(x) = y = e^0 = 1$.

   (b) $f'(\pi)$.

   *Resolução:* Seja $y = \left[\ln\left(\frac{3}{\pi}x\right)\right]^{\sin(2x)}$. Então:

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln\left[\ln\left(\tfrac{3}{\pi}x\right)\right]^{\sin(2x)} \\
\ln y &= \sin(2x)\cdot \ln\ln\left(\tfrac{3}{\pi}x\right)
\end{aligned}$$

Derivando implicitamente em relação à $x$, vem que:

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dx} \ln y &= \tfrac{d}{dx} \sin(2x) \cdot \ln \ln\left(\tfrac{3}{\pi}x\right) \\
\tfrac{y'}{y} &= 2\cos(2x) \cdot \ln \ln\left(\tfrac{3}{\pi}x\right) + \sin(2x)\left[\tfrac{1}{x\ln\left(\frac{3}{\pi}x\right)}\right] \\
y' &= y\left\{2\cos(2x) \cdot \ln \ln\left(\tfrac{3}{\pi}x\right) + \sin(2x)\left[\tfrac{1}{x\ln\left(\frac{3}{\pi}x\right)}\right]\right\} \\
y' &= \left[\ln\left(\tfrac{3}{\pi}x\right)\right]^{\sin(2x)}\left\{2\cos(2x) \cdot \ln \ln\left(\tfrac{3}{\pi}x\right) + \sin(2x)\left[\tfrac{1}{x\ln\left(\frac{3}{\pi}x\right)}\right]\right\}
\end{aligned}$$

e é fácil ver que $f'(\pi) = 2\ln(\ln(3))$.

2. Determine a área abaixo da função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 16}}$$

no intervalo $4 \leq x \leq 5$.

*Resolução:* Use a substituição trigonométrica $x = 4\sec(\theta) \Rightarrow dx = 4\sec(\theta)\tan(\theta)$ para escrever o integrando como:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-16}}\,dx = \int \sec(\theta)\,d\theta = \ln|\sec(\theta) + \tan(\theta)| + C = \ln\left|\frac{x}{4} + \frac{\sqrt{x^2-16}}{4}\right| + C.$$

Uma vez que o TFC nao pode ser aplicado aqui para obter $A = \int_4^5 f(x)\,dx$, pois $f(x)$ tem uma descontinuidade em $x = 4$, computamos

$$\lim_{a\to 4} \ln\left|\frac{x}{4} + \frac{\sqrt{x^2-16}}{4}\right|\Bigg|_a^5$$

ou seja,

$$A = \int_4^5 f(x)\,dx = \lim_{a\to 4} \ln\left|\frac{x}{4} + \frac{\sqrt{x^2-16}}{4}\right|\Bigg|_a^5 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

a área procurada.

3. Esboce o gráfico da função

$$f(x) = e^{-x^2}$$

determinando (1) domínio, (2) interceptos, (3) a existência de assíntotas verticais e horizontais, (4) intervalos de crescimento e decrescimento, (5) pontos extremos, (6) concavidade e (7) pontos de inflexão.

*Resolução:* óbvio que o domínio de $f(x)$ é $\mathbb{R}$ e que $f(x)$ nunca se anula. Por outro lado, se $x = 0$ enão $y = 1$.

Note que $f$ é uma função par, portanto simétrica em relação ao eixo $x$.

Agora $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. Então $f'(x) > 0$ para $x < 0$ e $f'(x) < 0$ para $x > 0$ ou seja, no intervalo $(-\infty, 0)$ a função $f(x)$ cresce e no intervalo $(0, +\infty)$ a função $f(x)$ decresce; logo, $f$ tem um máximo local em (0,1).

Agora $f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x(-2x)e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$. O sinal de $f''(x)$ é o seguinte: para $\frac{-\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ implica $f''$ negativa, logo $f$ côncava para baixo; para $x \in \left(-\infty, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ $f''$ é positiva implicando $f$ ser côncava para cima nestes intervalos. Logo $P_1 = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$ e $P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$ são pontos de inflexão.

O gráfico para $f(x)$ é apresentado a seguir:

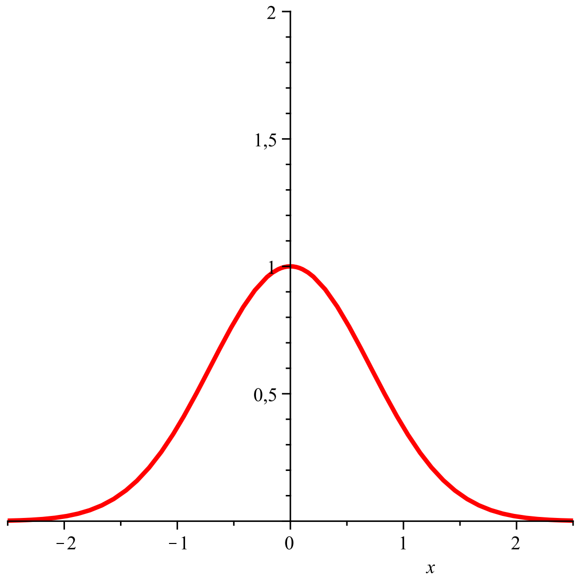


Figura 1: $f(x) = e^{-x^2}$

4. Um caixa de água no formato de um prisma reto, cuja base é um triângulo equilátero, deverá ser construída e conter 1.000 $l$ de capacidade. Calcule as dimensões desta caixa, de modo que a sua área total[1] seja mínima.

   *Resolução:* Sejam $x$ e $y$ a medida do lado do triângulo equilátero e a altura do prisma. Então nós sabemos que seu volume $V$ é dado por

$$V = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot y$$

   e como $V = 1$ m$^3$ então tiramos da relação anterior que

$$y = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x^2}. \tag{2}$$

   Queremos minimizar a área total deste prisma que é dada por

$$A(x,y) = 2\frac{x^2\sqrt{3}}{4} + 3xy = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x^2 + 3xy \tag{3}$$

   e usando a relação (2) encontramos uma função duma única variável, que iremos minimizá-la:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x^2 + 3x\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x^2 + \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot x^{-1}$$

   onde $x > 0$. Para encontrar o mínimo de $A$ derivamos e igualamos à zero para obter os pontos críticos:

$$A'(x) = \sqrt{3} \cdot x - \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot x^{-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x^2} = \sqrt{3} \cdot x \Leftrightarrow 3x^3 = 12 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}.$$

   Para averiguar que $x = \sqrt[3]{4}$ minimiza $A$ computemos $A''$ e usamos o Teste da Segunda Derivada:

$$A''(x) = \sqrt{3} + \frac{24}{\sqrt{3}} \cdot x^{-3} \Rightarrow A''(\sqrt[3]{4}) = \sqrt{3} + \frac{6}{\sqrt{3}} > 0$$

[1] A área total é a soma das áreas laterias com a área dos triangulos das bases inferior e superior. A área $S$ dum triangulo equilátero de lado $l$ é calculada por $S = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

logo $x = \sqrt[3]{4}$ é um minimizador local. Assim, $y = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{4^2}$, as dimensões do prisma com área mínima.

5. Ao rotacionarmos em torno do eixo $x$ a região delimitada pela função $f(x) = e^{-x}$, $0 \leq x \leq \alpha$, obtemos um sólido conhecido por *Trombeta de Gabriel*. No entanto, ao girarmos em torno do eixo $y$, obtemos um outro sólido conhecido como *Vulcão de Descartes.*

   (a) Obtenha $\alpha$ de modo que a *Trombeta de Gabriel* tenha um volume de $\frac{\pi}{8}$.

   *Resolução:* Devemos calcular $\alpha$ de modo que

$$\int_0^\alpha \left(e^{-x}\right)^2 \, dx = \pi \int_0^\alpha e^{-2x} \, dx = \frac{\pi}{8}.$$

   A integral anterior pode ser resolvida pela substituição $u = -2x \Rightarrow du = -2dx \Rightarrow dx = \frac{-du}{2}$. Se $x = 0 \Rightarrow u = 0$ e se $x = \alpha \Rightarrow u = -2\alpha$. Logo,

$$-\frac{1}{2} \int_0^{-2\alpha} e^u \, du = \frac{1}{8} \Rightarrow e^u \Big|_0^{-2\alpha} = -\frac{1}{4} \Rightarrow e^{-2\alpha} - 1 = -\frac{1}{4}$$

   isto é,

$$e^{-2\alpha} = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

   (b) Calcule o volume do *Vulcão de Descartes*, para $\alpha$ suficientemente grande, ou seja, $\alpha \to \infty$.

   *Resolução:* Nesse caso determinemos o volume do *Vulcão de Descartes* em função de $\alpha$. Para tanto, deveremos resolver a integra

$$V = 2\pi \int_0^\alpha x e^{-x} \, dx$$

   a qual será feita por partes. Seja $u = x \Rightarrow du = dx$ e $dv = e^{-xdx} \Rightarrow v = -e^{-x}$ logo

$$\int_0^\alpha x e^{-x} \, dx = -x e^{-x}\Big|_0^\alpha + \int_0^\alpha e^{-x} \, dx = \left(-x e^{-x} - e^{-x}\right)\Big|_0^\alpha = \left[-\left(1+x\right) e^{-x}\right]\Big|_0^\alpha$$

   isto é, $V(\alpha) = 2\pi\left(-(1+\alpha)e^{-\alpha} + 1\right)$. Como queremos $\alpha \to +\infty$ precisamos calcular

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha \to +\infty} V(\alpha) &= 2\pi \lim_{\alpha \to +\infty} \left(-(1+\alpha)e^{-\alpha} + 1\right) \\
&= 2\pi \lim_{\alpha \to +\infty} \left[\frac{-(1+\alpha)}{e^\alpha} + 1\right] \\
&= 2\pi \lim_{\alpha \to +\infty} \left[\frac{-1}{-e^{-\alpha}} + 1\right] \\
&= 2\pi(0+1) \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

   onde na antepenúltima linha aplicamos o Teorema de L'Hospital.

Cada questão vale 2,0 pontos.

Boa prova e um ótimo 2013!!!