Exame Manhã

Q1) a) $\lim_{x \to 0} x^4 \cos\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)$

Como $-1 \leq \cos\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right) \leq 1$ para todo $x > 0$

e $x^4 > 0$ para todo $x > 0$ então

(0,5)

$$-x^4 \leq x^4 \cos\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right) \leq x^4 \text{ para todo } x > 0$$

Além disso, $\lim_{x \to 0} x^4 = 0$. Portanto, pelo Teorema do Confronto temos que

$$\lim_{x \to 0} x^4 \cos\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right) = 0 \quad (0,5)$$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$ é uma indeterminação do tipo "$\frac{\infty}{\infty}$". Aplicando L'Hospital temos que

(0,5)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \ln x \frac{1}{x}}{1} = 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

Novamente temos uma indeterminação do tipo "$\frac{\infty}{\infty}$".

Por L'Hospital

(0,5)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0. \text{ Logo } \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

c) $\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

Para $x < 0$ temos que $\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} = \frac{2}{x}$ (0,5)

Logo $\lim_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2}{x} = -\infty$ (0,5)

Q2) (a) Pela regra do produto e regra da cadeia temos que

$$f'(x) = \cos(x^2)\,2x + e^x \cos^4(x) + e^x\, 4\cos^3(x)(-\text{sen}(x))$$

ou seja, $f'(x) = 2x\cos(x^2) + e^x \cos^3(x)[\cos x - 4\,\text{sen}\,x]$ (0,8)

Portanto $f'(0) = e^0 = 1$ (0,2)

b) A reta tangente tem como equação:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \quad (0,3)$$

ou seja, [redacted]. (0,2)

$$y = x + 1$$

Q3) Temos que o gráfico de f tem um ponto de inflexão em $(1,2)$ se $f''(1) = 0$ e $f''(x)$ muda de sinal em $x = 1$.

Vamos calcular f'':

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$f''(x) = 6ax + 2b \quad (0{,}4)$$

Fazendo $f''(1) = 0$ temos que $6a + 2b = 0$ (0,2)

Como $f(1) = 2$ então $a + b = 2$. (0,2)

Resolvendo o sistema obtemos $a = -1$ e $b = 3$. (0,2)

Logo $f''(x) = -6x + 6$. Portanto, como $f''(x) < 0$ se $x > 1$ e $f''(x) > 0$ se $x < 1$ então $x = 1$ é ponto de inflexão. (0,5)

Q4) a) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}\,dx$

Fazendo a substituição $u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}\,dx$

$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}\,dx = \int \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\,du$ (0,5)

Fazendo $z = 1+u^2$ $\quad dz = 2u\,du$

$\int \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz = \sqrt{z} + C$

$= \sqrt{1+u^2} + C$ (0,5)

Logo $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}\,dx = \sqrt{1+(\ln x)^2} + C$

Esquecer a constante C: $-(0,1)$

Q4) b) $\int \frac{1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx$

Por frações parciais temos que

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}$$

Portanto $(A+B)x^2 + Cx + A = 1$

Logo, $\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{array}$

(0,5)

Portanto $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{(-x)}{x^2+1}$ e

$$\int \frac{1}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \ln|x| - \int \frac{du}{2u} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$$

substituição $u = x^2+1$, $du = 2x\,dx$

(0,5)

Q5) A área será dada por

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b x e^{-x}\,dx \quad (0{,}5)$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[-xe^{-x}\Big|_0^b - \int_0^b (-e^{-x})\,dx \right] \quad (0{,}7)$$

Integração por partes

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[-be^{-b} - e^{-x}\Big|_0^b \right]$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[-be^{-b} - e^{-b} + 1 \right] \quad (0{,}3)$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(-be^{-b}\right) + 1 =$$

L'Hospital

$$= -\lim_{b\to\infty} \left(\frac{b}{e^b}\right) + 1 = -\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^b}\right) + 1 = 1 \quad (0{,}5)$$

Portanto a área da região S é 1.