Q1. (3.0) Avalie os limites abaixo e encontre o correspondente valor caso exista.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8x^2}{\cos x - 1}$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2+1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}\right)$

Solução: (a) Tanto o limite do numerador quanto o limite do denominador se anulam. Assim, aplicando a regra de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{8x^2}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{16x}{\operatorname{sen} x}. \ (0.5)$$

Novamente, tanto o limite do numerador quanto o limite do denominador se anulam. Logo, por L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{8x^2}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{16x}{-\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{16}{-\cos x} = -16 \ (0.5)$$

(b) Primeiro notemos que para qualquer x real, temos $0 \le \operatorname{sen}^2 x \le 1$. Logo, levando em conta que $x^2+1>0$,

$$0 \le \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2+1} \le \frac{1}{x^2+1}. \ (0.5)$$

Agora, como $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$, pois $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2+1 = +\infty$, obtemos pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2+1} = 0. \ (0.5)$$

(c) Como queremos o limite quando x tende a zero pela direita, podemos considerar $x>0$, de modo que $|x| = x$. (0.5) Portanto,

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) = 0. \ (0.5)$$

Q2. (1.5) Considere a função $f(x) = \text{tg}(x^3) + x\ln(x^2+1)$.

(1.0)(a) Calcule $f'(x)$ e $f'(0)$.

(0.5)(b) Determine a reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 0$.

Solução: (a) Usando a regra da cadeia e a regra do produto, temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sec^2(x^3)3x^2 + \ln(x^2+1) + x\frac{1}{x^2+1}2x \\ &= 3x^2\sec^2(x^3) + \ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}. \quad (0.8) \end{aligned}$$

Substituindo $x = 0$ na expressão acima vemos prontamente que $f'(0) = 0$. (0.2)

(b) Notemos que em $x = 0$ temos $f(0) = f'(0) = 0$. Assim, lembrando que a equação da reta tangente (em $x = 0$) é dada por $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$, vemos que a reta tangente tem equação $y = 0$. (0.5)

Q3. (1.5) Para quais valores dos números a e b a função $f(x) = axe^{bx^2}$ tem o valor máximo de $f(2) = 1$?

Solução: Para que $x = 2$ seja um ponto de máximo de f, este deve ser um ponto crítico. Notemos que

$$f'(x) = ae^{bx^2} + ax.2bx.e^{bx^2} = (a + 2abx^2)e^{bx^2}. \ (0.4)$$

Assim, os únicos pontos críticos são àqueles tais que $f'(x) = 0$. Daí, ($a \neq 0$, pois caso contrário f seria a função nula)

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow a + 2abx^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{2b}$$

Substituindo $x = 2$ neste última expressão vemos que

$$b = -\frac{1}{8}. \ (0.4)$$

Por outro lado, como queremos $f(2) = 1$, substituindo $x = 2$ na expressão de f (e usando que $b = -1/8$), obtemos

$$f(2) = 1 \Leftrightarrow 2ae^{-1/2} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}e^{1/2}. \ (0.4)$$

Vamos verificar que, de fato, a função $f(x) = \frac{1}{2}e^{1/2}xe^{-x^2/8}$ possui um valor máximo $f(2) = 1$. Para isso, vamos usar o teste da derivada primeira. Como,

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^2\right) e^{1/2}e^{-x^2/8},$$

temos

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x^2) > 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2.$$

Logo, a primeira derivada é positiva a esquerda de 2 e negativa a direita, o que implica que $x = 2$ é um ponto de máximo. (0.3)

Q4. (2.0) Calcule as seguintes integrais

(a) $\displaystyle\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-x}\,dx$

Solução: (a) Primeiro, fazendo a mudança de variável $w = 1 + x^2$, temos $dw = 2xdx$ e $x^2 = w - 1$. Logo,

$$\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int x^2\sqrt{1+x^2}\,2xdx = \frac{1}{2}\int (w-1)\sqrt{w}dw \text{ (0.5)}$$

$$= \frac{1}{2}\int (w^{3/2} - \sqrt{w})dw = \frac{1}{2}(\frac{2}{5}w^{5/2} - \frac{2}{3}w^{3/2}) + C.$$

Lembrando que $w = 1 + x^2$, obtemos

$$\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{5}(1+x^2)^{5/2} - \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C. \text{ (0.5)}$$

(b) Usando frações parciais, escrevemos

$$\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x^3-x}$$

Daqui segue que devemos ter $A(x^2 - 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 1) = 1$, para qualquer x real. Fazendo, respectivamente, $x = 0$, $x = 1$ e $x = -1$ nesta última identidade, obtemos $A = -1$, $B = 1/2$ e $C = 1/2$. (0.5)

Portanto,

$$\int \frac{1}{x^3-x}\,dx = -\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx$$
$$= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C. \text{ (0.5)}$$

Esquecer a constante C : -(0,1)

Q5. (2.0) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y da região delimitada pela curva $y = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $y = 0$ e $0 \leq x \leq 1$.

Solução: Usando cascas cilíndricas, se $y = f(x)$,

$$V = \int_0^1 2\pi x f(x)\,dx = 2\pi \int_0^1 x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx. \ (0.8)$$

Para resolver esta última integral, façamos $u = x$ e $dv = \cos(\frac{\pi x}{2})$, de forma que $du = dx$ e $v = \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})$. Logo,

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\left(x.\frac{2}{\pi}\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})dx\right) \quad (0.7) \\ &= 2\pi\left(\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}.\frac{2}{\pi}.\cos(\frac{\pi x}{2})\Big|_0^1\right) \\ &= 2\pi\left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right) \\ &= 4 - \frac{8}{\pi} \ (0.5) \end{aligned}$$