Q1.(3.0) Calcule o limite ou prove que não existe:

(0.8)(a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{|2x-3|}{2x-3}$

(0.8)(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 g(x)$ onde $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(0.7)(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2+3x})$

(0.7)(d) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{3x^2+4}{x-2}$

Resolução:

(a) O limite não existe pois os limites laterais são diferentes:

Limite lateral pela direita: Observe que se $x > 3/2$ então $|2x-3| = 2x-3$ e portanto

$$\frac{|2x-3|}{2x-3} = \frac{2x-3}{2x-3} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 3/2^+} \frac{|2x-3|}{2x-3} = 1. \text{ (0.3)} \tag{1}$$

Limite lateral pela esquerda: Observe que se $x < 3/2$ então $|2x-3| = -2x+3$ e portanto

$$\frac{|2x-3|}{2x-3} = \frac{-2x+3}{2x-3} = -1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 3/2^-} \frac{|2x-3|}{2x-3} = -1. \text{ (0.3)} \tag{2}$$

De (1) e (2) concluímos que os limites laterais são diferentes e portanto o limite não existe. (0.2)

(b) Observe que $-1 \leq g(x) \leq 1$ e portanto como $x^2 \geq 0$, $-x^2 \leq x^2 g(x) \leq x^2$. (0.4) Como $\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$ e $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ (0.2) então pelo Teorema do Confronto temos que $\lim_{x\to 0} x^2 g(x) = 0$. (0.2)

(c) Note que para todo $x > 0$ temos que

$$x - \sqrt{x^2+3x} = (x - \sqrt{x^2+3x})\frac{x+\sqrt{x^2+3x}}{x+\sqrt{x^2+3x}} =$$

$$= \frac{x^2-(x^2+3x)}{x+\sqrt{x^2+3x}} = \frac{-3x}{x+\sqrt{x^2+3x}} = \frac{-3}{1+\sqrt{1+3/x}}. \text{ (0.4)}$$

Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0$ temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{1+\sqrt{1+3/x}} = -\frac{3}{2}. \text{ (0.2)}$$

Finalmente, concluímos que

$$\lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2+3x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{1+\sqrt{1+3/x}} = -\frac{3}{2}. \text{ (0.1)}$$

(d) Analisando por separado, no numerador temos que $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} 3x^2+4 = 16 > 0$. (0.3)

Por outro lado, $x-2$ fica próximo do zero, mas com valores pequenos positivos quando $x \to 2$ e $x > 2$, logo $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$. (0.3)

Então

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3x^2+4}{x-2} = +\infty \text{ (0.1)}$$

Q2.(1.5) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x^3}, & x \geq 1 \\ ax^2, & x < 1. \end{cases}$$

Encontre o valor de a para que f seja contínua em $x = 1$.

Resolução: Temos que uma função f é contínua em um ponto p se f estiver definida neste ponto e se o limite $\lim_{x\to p} f(x)$ existir e for igual a $f(p)$. Temos que f está definida em $x = 1$ e $f(1) = e$. (0.4)

Para ver que o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 existe precisamos mostrar que os limites laterais existem e são iguais:

Limite lateral pela direita: Para todo $x > 1$ temos que $f(x) = xe^{x^3}$. Como os polinômios e a função exponencial são contínuas temos que a multiplicação e a composição de tais funções também será uma função contínua e portanto $\lim_{x\to 1^+} (xe^{x^3}) = 1.e^{1^3} = e$. (0.3)

Limite lateral pela esquerda: Para todo $x < 1$ temos que $f(x) = ax^2$. Como os polinômios são funções contínuas temos $\lim_{x\to 1^-} ax^2 = a.1^2 = a$. (0.3)

Logo, para que f seja contínua em $x = 1$ precisamos que os limites laterais sejam iguais, ou seja, precisamos que $a = e$. Neste caso, temos que $\lim_{x\to 1} f(x) = e = f(1)$. Portanto f é contínua em $x = 1$. (0.5)

Q3.(3.0) Encontre as assíntotas verticais e horizontais da seguinte função

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 6x + 5}.$$

Depois faça um esboço do gráfico de f.

Resolução: Para encontrarmos as assíntotas horizontais basta calcularmos os limites no infinito de $f(x)$. Para isso, observe que para todo $x \neq 0$ temos que

$$\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 6x + 5} = \frac{x^2(1 - 5/x)}{x^2(1 - 6/x + 5/x^2)} = \frac{1 - 5/x}{1 - 6/x + 5/x^2}. \text{ (0.4)}$$

Como $\lim_{x \to +\infty} (1/x^n) = 0$ e $\lim_{x \to -\infty} (1/x^n) = 0$ para todo n inteiro positivo podemos concluir que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 5/x}{1 - 6/x + 5/x^2} = 1 \text{ e } \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - 5/x}{1 - 6/x + 5/x^2} = 1$$

donde segue que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 6x + 5} = 1 \text{ e } \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 6x + 5} = 1 \text{ (0.4)}.$$

Portanto, $y = 1$ é assíntota horizontal. (0.2)

Para obter as assíntotas verticais devemos encontrar um ponto a tal que o limite ou os limites laterais quando x tende ao ponto a é infinito ou menos infinito. Para encontrar tal ponto vamos encontrar as raízes do denominador da nossa função. Temos que as raízes de $x^2 - 6x + 5$ são $x = 1$ e $x = 5$, logo podemos escrever $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$. Note que, para todo $x \neq 5$ e $x \neq 1$ temos que

$$\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 6x + 5} = \frac{x^2 - 5x}{(x - 1)(x - 5)} = \frac{x(x - 5)}{(x - 1)(x - 5)} = \frac{x}{x - 1}. \text{ (0.3)}$$

Dessa forma, o único ponto candidato a gerar uma assíntota vertical é $x = 1$. (0.2)

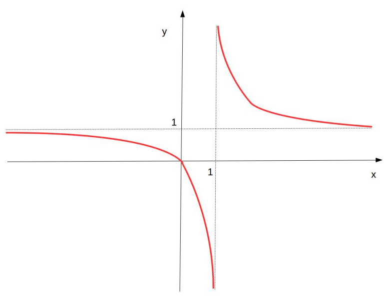
Para verificar que reta $x = 1$ é uma assíntota vertical vamos calcular o limite lateral $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ ou $\lim_{x \to 1^-} f(x)$. Observe que para todo $x > 1$ temos que $\frac{1}{x - 1} > 0$ e portanto $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x - 1} = +\infty$. Além disso, como $\lim_{x \to 1} x = 1$ concluímos que $\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x - 1} = +\infty$. Logo,

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 6x + 5} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x - 1} = +\infty. \text{ (0.4)}$$

Portanto $x = 1$ é uma assíntota horizontal. (0.2)

Agora, para fazer o esboço do gráfico, calculemos o limite lateral que está faltando, neste caso $\lim_{x \to 1^-} f(x)$. Para todo $x < 1$ temos que $\frac{1}{x - 1} < 0$ e portanto $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x - 1} = -\infty$. Usando que $\lim_{x \to 1} x = 1$ concluímos que $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 6x + 5} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x - 1} = -\infty$. (0.4)

A seguir temos o esboço do gráfico da função f: (0.5)



Q4.(2.5) Considere a função $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x)}{x + 2}$$

(1.0)(a) Mostre que existe $x \in (-1, 1)$ tal que $f(x) = 0$. (**Dica:** Use o Teorema do Valor Intermediário)

(1.0)(b) Determine a derivada f' de f e depois calcule o valor de $f'(0)$.

(0.5)(c) Encontre a reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 0$.

Resolução:

(a) Como a ideia é aplicar o Teorema do Valor Intermediário devemos verificar que f satisfaz as hipóteses do teorema. Primeiro observe que f é uma função contínua em $[-1, 1]$ já que as funções $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x)$ e $x + 2$ são contínuas e $x + 2 \neq 0$ para todo $x \in [-1, 1]$. (0.3)

Temos que $f(-1) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}(-1))}{-1+2} = -1$ e $f(1) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}1)}{1+2} = \frac{1}{3}$, ou seja, $f(-1) \neq f(1)$. (0.2)

Como $f(-1) = -1 < 0 < 1/3 = f(1)$ temos, pelo Teorema do Valor Intermediário, que existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$. (0.5)

(b) Vamos usar a regra do quociente e a regra da cadeia. Para facilitar as contas vamos escrever $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, onde $g(x) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x)$ e $h(x) = x + 2$. Pela regra do quociente temos que

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2}.$$

Temos que $h'(x) = (x + 2)' = 1$. Usando a regra da cadeia temos que $g'(x) = [\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x)]' = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)$. Portanto,

$$f'(x) = \frac{\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)(x + 2) - \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x)}{(x + 2)^2}. \quad (0.7)$$

Para calcular o valor de $f'(0)$ basta substituir $x = 0$ na expressão acima,

$$f'(0) = \frac{\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}0)(0 + 2) - \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}0)}{(0 + 2)^2} = \frac{\pi}{4},$$

ou seja, $f'(0) = \frac{\pi}{4}$. (0.3)

(c) Como existe a derivada de f no ponto $x = 0$ temos que a reta tangente ao gráfico de f neste ponto existe e é dada por $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, substituindo os valores $f(0) = 0$ e $f'(0) = \pi/4$ encontramos que a equação da reta tangente é $y = \frac{\pi}{4}x$. (0.5)