Q1.(3.0) Calcule o limite ou prove que não existe:

(0.7)(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+5}{x-3}$

(0.8)(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 \cos\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\Big)$

(0.7)(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^5+3x^2-x}{2x^5-4x^3+1}$

(0.8)(d) $\displaystyle\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{14}}$

Resolução:

(a) Analisando por separado, no numerador temos $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} x^2+5 = 14 > 0.$ (0.3)
Por outro lado, $x-3$ fica próximo do zero, mas com valores pequenos negativos quando $x \to 3$ e $x < 3$, logo $\displaystyle\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty.$ (0.3)
Então

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+5}{x-3} = -\infty \ (0.1)$$

(b) Observe que $-1 \le \cos\big(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\big) \le 1$ e portanto como $x^2 \ge 0$, $-x^2 \le x^2\cos\big(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\big) \le x^2.$ (0.4)
Como $\displaystyle\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ (0.2) então pelo Teorema do Confronto temos que $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 \cos\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\Big) = 0.$ (0.2)

(c) Escrevemos

$$\frac{x^5+3x^2-x}{2x^5-4x^3+1} = \frac{x^5(1+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4})}{x^5(2-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^5})} = \frac{1+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}}{2-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^5}} \ (0.4)$$

Como $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(1/x^n) = 0$ para todo n inteiro positivo podemos concluir que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^5+3x^2-x}{2x^5-4x^3+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}}{2-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^5}} = \frac{1}{2}. \ (0.3)$$

(d) Racionalizando as raizes e aplicando diferença de quadrados temos

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{7}}{\sqrt{x}+\sqrt{7}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{14}} = \frac{x-7}{\sqrt{x}+\sqrt{7}} \frac{1}{\sqrt{x+7}-\sqrt{14}} \ (0.3)$$

$$= \frac{x-7}{\sqrt{x}+\sqrt{7}} \frac{1}{\sqrt{x+7}-\sqrt{14}} \frac{\sqrt{x+7}+\sqrt{14}}{\sqrt{x+7}+\sqrt{14}}$$

$$= \frac{x-7}{\sqrt{x}+\sqrt{7}} \frac{\sqrt{x+7}+\sqrt{14}}{x+7-14} = \frac{\sqrt{x+7}+\sqrt{14}}{\sqrt{x}+\sqrt{7}} = \ (0.3)$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{14}} = \lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+7}+\sqrt{14}}{\sqrt{x}+\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{14}}{2\sqrt{7}} = \sqrt{2}. \ (0.2)$$

Q2.(2.5) Considere a função $f(x) = \dfrac{|x^2-1|}{x^2-1}$.

(0.5)(a) Esboce o gráfico de $f(x)$.

(1.0)(b) Determine analiticamente o(s) ponto(s) em que f é descontínua.

(0.5)(c) Esta(s) descontinuidade(s) pode(m) ser removida(s)? Justifique.

(0.5)(d) A função f é diferenciável em $x = 1$? Justifique.

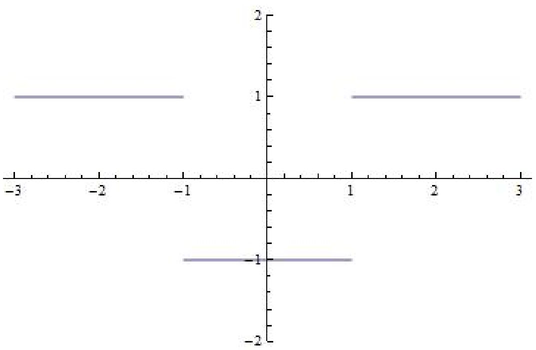
Resolução:

(0.5)(a) Notemos que $x \neq 1$ e $x \neq -1$ não estão no domínio de f.

Agora, se $x^2 \geq 1$, ou seja, para $x \geq 1$ ou $x \leq -1$, então $|x^2-1| = x^2-1$. Se $x^2 < 1$, ou seja, para $-1 < x < 1$, então $|x^2-1| = -(x^2-1)$. Portanto

$$f(x) = \frac{|x^2-1|}{x^2-1} = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 1 \\ -1 & \text{se } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

Esboço do gráfico de f :



(1.0)(b) Para $x \neq 1$ e $x \neq -1$ a função f é constante e portanto contínua. (0.5)

Como a função não está definida em $x \neq 1$ e $x \neq -1$, ela não é contínua nesses pontos. (0.5)

(0.5)(c) As descontinuidades não podem ser removidas, pois os limites não existem.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -1 = -1$$

Como os limites laterais não são iguais temos que não existe $\lim_{x\to 1} f(x)$.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} 1 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} 1 = 1$$

Como os limites laterais não são iguais temos que não existe $\lim_{x\to -1} f(x)$.

(0.5)(d) A função f não é diferenciável em $x = 1$ pois não é contínua nesse ponto.

Q3.(1.5) Utilizando o Teorema do Valor Intermediário (TVI) justifique que a equação

$$\frac{x}{2} = \text{sen}(x)$$

possui uma solução não nula.

Resolução: A equação $\frac{x}{2} = \text{sen}(x)$, pode ser escrita como $\frac{x}{2} - \text{sen}(x) = 0$. (0.2) Mais ainda se chamamos $f(x) = \frac{x}{2} - \text{sen}(x)$ então devemos achar uma raiz não nula da equação $f(x) = 0$. (0.2)

Temos que $f(0) = 0$, mas nesse caso, a raiz é nula. Vejamos os valores de $f(x)$ em $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \pi$.

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4} - 1 \text{ e } \quad f(\pi) = \frac{\pi^2}{2}. \text{ (0.2)}$$

Dado que $f(x)$ é uma função contínua no intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ já que é soma de funções contínuas (0.3) e

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4} - 1 < 0 < \frac{\pi^2}{2} = f(\pi) \text{ (0.3)}$$

Pelo teorema de Valor Intermediário, existe pelo menos um $c \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ tal que $f(c) = 0$. Logo, como $c \neq 0$, concluímos que c é uma raiz não nula da equação. (0.3)

Q4.(3.0)

(1.0)(a) Calcule a derivada de $f(x) = e^{5x}(\sqrt{x} - \cos(x))^3$.

(1.0)(b) Calcule a derivada de $g(x) = \dfrac{2x+5}{x+3}$

(1.0)(c) Determine os pontos do gráfico de $g(x)$ dada no item (b) onde a reta tangente é paralela à reta $y = \frac{x}{4}$.

Resolução:

(a) Pela regra do produto,

$$f'(x) = (e^{5x}(\sqrt{x} - \cos(x))^3)' = (e^{5x})'(\sqrt{x} - \cos(x))^3 + e^{5x}((\sqrt{x} - \cos(x))^3)'. \; (0.3)$$

Pela regra da cadeia $(e^{5x})' = 5e^{5x}$ (0.2) e

$$((\sqrt{x} - \cos(x))^3)' = 3(\sqrt{x} - \cos(x))^2(\sqrt{x} - \cos(x))' = 3(\sqrt{x} - \cos(x))^2(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \operatorname{sen}(x)). \; (0.4)$$

Logo,

$$f'(x) = 5e^{5x}(\sqrt{x} - \cos(x))^3 + e^{5x}3(\sqrt{x} - \cos(x))^2(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \operatorname{sen}(x)). \; (0.1)$$

(b) Pela regra do quociente

$$g'(x) = \left(\frac{2x+5}{x+3}\right)' = \frac{(2x+5)'(x+3) - (2x+5)(x+3)'}{(x+3)^2} \; (0.5)$$

$$= \frac{2(x+3) - (2x+5)}{(x+3)^2} = \frac{1}{(x+3)^2} \; (0.5)$$

(c) Devemos achar os pontos x onde $g'(x) = \frac{1}{4}$. (0.4) Logo,

$$g'(x) = \frac{1}{(x+3)^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow (x+3)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5 \text{ e } x = -1. \; (0.4).$$

Portanto, os pontos do gráfico são $(-5, g(-5)) = (-5, \frac{5}{2})$ e $(-1, g(-1)) = (-1, \frac{3}{2})$. (0.2)