Q1.(3.0) Calcule o limite ou prove que não existe:

(0.7)(a) $\lim_{t\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-t}}{t}$

(0.8)(b) $\lim_{x\to -\infty} e^x \text{sen}(x)$

(0.7)(c) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3-4x+1}{3x^3-2x+6}$

(0.8)(d) $\lim_{x\to 3} \dfrac{6x-2}{x-3}$

Resolução:

(a) Racionalizando as raizes e aplicando diferença de quadrados temos

$$\frac{2-\sqrt{4-t}}{t} = \frac{2-\sqrt{4-t}}{t}\,\frac{2+\sqrt{4-t}}{2+\sqrt{4-t}} = \frac{4-(4-t)}{t(2+\sqrt{4-t})}$$

$$= \frac{t}{t(2+\sqrt{4-t})} = \frac{1}{2+\sqrt{4-t}} \ (0.5)$$

Portanto,

$$\lim_{t\to 0}\frac{2-\sqrt{4-t}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{2+\sqrt{4-t}} = \frac{1}{2+\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.\ (0.2)$$

(b) Observe que $-1 \le \text{sen}(x) \le 1$ e portanto como $e^x \ge 0$, $-e^x \le e^x\text{sen}(x) \le e^x$. (0.4) Como $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$ e $\lim_{x\to -\infty} -e^x = 0$ (0.2) então pelo Teorema do Confronto temos que $\lim_{x\to -\infty} e^x\text{sen}(x) = 0$. (0.2)

(c) Escrevemos

$$\frac{2x^3-4x+1}{3x^3-2x+6} = \frac{x^3(2-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3})}{x^3(3-\frac{2}{x^2}+\frac{6}{x^3})} = \frac{2-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{3-\frac{2}{x^2}+\frac{6}{x^3}} \ (0.4)$$

Como $\lim_{x\to+\infty}(1/x^n) = 0$ para todo n inteiro positivo podemos concluir que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-4x+1}{3x^3-2x+6} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{3-\frac{2}{x^2}+\frac{6}{x^3}} = \frac{2}{3}.\ (0.3)$$

(d) Analisando por separado, no numerador temos que $\lim_{x\to 3} 6x-2 = 16 > 0$. (0.2)
Por outro lado, $x-3$ fica próximo do zero, mas com valores pequenos negativos quando $x\to 3$ e $x<3$, logo $\lim_{x\to 3^-}\dfrac{1}{x-3} = -\infty$, e $x-3$ fica próximo de fica próximo do zero, mas com valores pequenos positivos quando $x\to 3$ e $x>3$, logo $\lim_{x\to 3^+}\dfrac{1}{x-3} = +\infty$. Portanto:

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{6x-2}{x-3} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 3^-}\frac{6x-2}{x-3} = -\infty \ (0.4)$$

Conclusão:

$$\lim_{x\to 3}\frac{6x-2}{x-3} \quad \text{não existe } (0.2)$$

Q2.(2.5) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1}, & x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x < 1 \\ 1 + \ln(x), & x \geq 1. \end{cases}$$

(1.5)(a) Determine os pontos de continuidade de f.

(1.0)(b) Determine todas as assíntotas verticais e horizontais ao gráfico de

$$g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Resolução:

(a) Temos que uma função f é contínua em um ponto p se f estiver definida neste ponto e se o limite $\lim_{x \to p} f(x)$ existir e for igual a $f(p)$. Para $x \neq -1$ e $x \neq 1$ a função é contínua pois e^{x+1}, x^2 e $1 + \ln(x)$ são funções contínuas. (0.5)

Para $x = -1$, calculemos os limites laterais:

Limite lateral pela direita: Para todo $x > -1$ temos que $f(x) = x^2$. Portanto $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x^2 = (-1)^2 = 1$.

Limite lateral pela esquerda: Para todo $x < -1$ temos que $f(x) = e^{x+1}$. Portanto $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} e^{x+1} = e^{-1+1} = e^0 = 1$.

Como os limites laterais são iguais, então existe $\lim_{x \to -1} f(x) = 1 = f(-1)$. Logo f é contínua em $x = -1$. (0.5)

Para $x = 1$, calculemos os limites laterais:

Limite lateral pela direita: Para todo $x > 1$ temos que $f(x) = 1 + \ln(x)$. Portanto $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 1 + \ln(x) = 1 + 0 = 1$.

Limite lateral pela esquerda: Para todo $x < 1$ temos que $f(x) = x^2$. Portanto $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1^2 = 1$.

Como os limites laterais são iguais, então existe $\lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$. Logo f é contínua em $x = 1$. (0.5)

(b) Para encontrarmos as assíntotas horizontais basta calcularmos os limites no infinito de $g(x)$. Como quando $x \to \pm\infty$ temos que $x - 1 \to \pm\infty$ e então $(x-1)^2 \to +\infty$, assim

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(x-1)^2} = 0 = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{(x-1)^2}$$

Logo, $y = 0$ é assíntota horizontal. (0.5)

Para obter as assíntotas verticais devemos encontrar um ponto p tal que o limite ou os limites laterais quando x tende ao ponto p é infinito ou menos infinito. No caso, isso pode ocorrer quando $x = 1$. Calculemos os limites laterais para $p = 1$.

Note que $(x-1)^2$ fica próximo do zero, mas com valores pequenos positivos quando $x \to 1$, para $x > 1$ e $x < 1$. Logo,

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Portanto, $x = 1$ é uma assíntota vertical. (0.5)

Q3.(1.5) Use o Teorema do Valor Intermediário (TVI) para mostrar que o gráfico de

$$f(x) = e^{-x} + 3x^2$$

fica horizontal em algum ponto do intervalo $(0, 1)$. Ponto horizontal do gráfico significa que a reta tangente é horizontal em aquele ponto.

Resolução: Devemos encontrar um ponto $x \in (0, 1)$ tal que $f'(x) = 0$. (0.2)

Temos $f'(x) = -e^{-x} + 6x$. Portanto devemos achar uma raiz da equação $-e^{-x} + 6x = 0$ no intervalo $(0, 1)$. (0.2)

Avaliando f' nos extremos do intervalo:

$$f'(0) = -1 \text{ e } \quad f(1) = -e^{-1} + 6. \text{ (0.2)}$$

Dado que $f'(x)$ é uma função contínua no intervalo $[0, 1]$ já que é soma de funções contínuas (0.3) e

$$f'(0) = -1 < 0 < -e^{-1} + 6 = f'(1) \text{ (0.3)}$$

pelo teorema de Valor Intermediário, existe pelo menos um $c \in (0, 1)$ tal que $f'(c) = 0$, ou seja, c é solução da equação $-e^{-x} + 6x = 0$. (0.3)

Q4.(3.0) Calcule a derivada das seguintes funções, usando as regras de derivação:

(a) $g(z) = \dfrac{(z^3+2z+1)^4}{(z^3+2z-1)^3}$

(b) $t(x) = (\sqrt{x} + 2x^3)(3^x - x^7)$

(c) Calcule $f'(0)$ para $f(x) = e^{x^3}\cos(5x)$

Resolução:

(a) Pela regra da cadeia:

$$((z^3+2z+1)^4)' = 4(z^3+2z+1)^3(3z^2+2) \quad \text{e} \quad ((z^3+2z-1)^3)' = 3(z^3+2z-1)^2(3z^2+2). \ (0.5)$$

Agora, pela regra do quociente

$$g'(z) = \frac{4(z^3+2z+1)^3(3z^2+2)(z^3+2z-1)^3 - (z^3+2z+1)^4 3(z^3+2z-1)^2(3z^2+2)}{(z^3+2z-1)^6}$$

$$= \frac{(z^3+2z+1)^3(3z^2+2)(z^3+2z-1)^2}{(z^3+2z-1)^6}[4(z^3+2z-1) - 3(z^3+2z+1)] \ (0.5)$$

(b) Pela regra do produto

$$t'(x) = (\sqrt{x} + 2x^3)'(3^x - x^7) + (\sqrt{x} + 2x^3)(3^x - x^7)' \ (0.5)$$

$$= (\frac{1}{2\sqrt{x}} + 6x^2)(3^x - x^7) + (\sqrt{x} + 2x^3)(\ln(3)3^x - 7x^6) \ (0.5)$$

(c) Pela regra do produto e da cadeia,

$$f'(x) = (e^{x^3})'\cos(5x) + e^{x^3}(\cos(5x))' = 3x^2 e^{x^3}\cos(5x) - e^{x^3}5\text{sen}(5x). \ (0.7)$$

Agora,

$$f'(0) = 3.0^2 e^{0^3}\cos(0) - e^{0^3}5\text{sen}(5.0) = 0. \ (0.3)$$