Q1.(3.0) Calcule o limite ou prove que não existe:

(0.7)(a) $\lim_{x\to 7^+} \dfrac{2x-1}{x-7}$

(0.8)(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{[\text{sen}(5x)]^2}{x^2}$

(0.7)(c) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x+\sqrt{2x+15}}{x+3}$

(0.8)(d) $\lim_{x\to 0} x^4 \cos\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$

Resolução:

(a) Analisando por separado, no numerador temos que $\lim_{x\to 7^+} 2x-1 = 13 > 0$. (0.2)
Por outro lado, $x-7$ fica próximo do zero, mas com valores pequenos positivos quando $x \to 7$ e $x > 7$, logo $\lim_{x\to 7^+} \dfrac{1}{x-7} = +\infty$. (0.3) Portanto:

$$\lim_{x\to 7^+} \frac{2x-1}{x-7} = +\infty \ (0.2)$$

(b) Vamos a usar o limite fundamental $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}(x)}{x} = 1$. (0.2) Temos que

$$\frac{[\text{sen}(5x)]^2}{x^2} = 25\frac{[\text{sen}(5x)]^2}{(5x)^2} = 25\left(\frac{\text{sen}(5x)}{5x}\right)^2 \ (0.3)$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{[\text{sen}(5x)]^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 25\left(\frac{\text{sen}(5x)}{5x}\right)^2 = 25 \lim_{u\to 0}\left(\frac{\text{sen}(u)}{u}\right)^2 = 25.1^2 = 25. \ (0.3)$$

(c) Racionalizando as raizes e aplicando diferença de quadrados temos

$$\frac{x+\sqrt{2x+15}}{x+3} = \frac{x+\sqrt{2x+15}}{x+3}\,\frac{x-\sqrt{2x+15}}{x-\sqrt{2x+15}} = (x^2-2x-15)\frac{1}{(x+3)(x-\sqrt{2x+15})}$$

$$= (x+3)(x-5)\frac{1}{(x+3)(x-\sqrt{2x+15})} = \frac{x-5}{x-\sqrt{2x+15}} \ (0.5)$$

Portanto,

$$\lim_{x\to -3} \frac{x+\sqrt{2x+15}}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{x-5}{x-\sqrt{2x+15}} = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}, \ (0.2)$$

(d) Observe que $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) \leq 1$ e portanto como $x^4 \geq 0$, $-x^4 \leq x^4\cos\left(\frac{1}{x^3}\right) \leq x^4$. (0.4)
Como $\lim_{x\to 0} x^4 = 0$ e $\lim_{x\to 0} -x^4 = 0$ (0.2) então pelo Teorema do Confronto temos que $\lim_{x\to 0} x^4\cos\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$. (0.2)

Q2.(2.5) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{6x-3}{x-2}, & \text{se} \quad x \geq 1 \\ 4x-1, & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

(1.0)(a) A função f é contínua em $x = 1$? Justifique sua resposta.

(0.5)(b) Encontre a assíntota **horizontal** de f quando $x \to +\infty$.

(1.0)(c) Para $x > 2$, encontre o ponto do gráfico de $f(x)$ onde a reta tangente é paralela à reta $y = 9x - 11$.

Resolução:

(a) Temos que uma função f é contínua em um ponto p se f estiver definida neste ponto e se o limite $\lim_{x\to p} f(x)$ existir e for igual a $f(p)$. Para $x = 1$, a função $f(1) = 3$ (0.2)

Calculemos os limites laterais:

Limite lateral pela direita: Para todo $x > 1$ temos que $f(x) = -\frac{6x-3}{x-2}$. Portanto $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} -\dfrac{6x-3}{x-2} = 3.$ (0.3)

Limite lateral pela esquerda: Para todo $x < 1$ temos que $f(x) = 4x - 1$. Portanto $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 4x - 1 = 3.$ (0.3)

Como os limites laterais são iguais, então existe $\lim_{x\to 1} f(x) = 3 = f(1)$. Logo f é contínua em $x = 1$. (0.2)

(b) Escrevemos

$$-\frac{6x-3}{x-2} = -\frac{x(6-\frac{3}{x})}{x(1-\frac{2}{x})} = -\frac{6-\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}.$$

Como $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ temos que

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{6x-3}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{6-\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}} = -6$$

Logo, $y = -6$ é assíntota horizontal. (0.5)

(c) Para $x > 2$ devemos encontrar os x tais que $f'(x) = 9$. (0.2) Pela regra do quociente,

$$f'(x) = -\Big(\frac{6x-3}{x-2}\Big)' = -\frac{(6x-3)'(x-2) - (6x-3)(x-2)'}{(x-2)^2}$$

$$= -\frac{6(x-2) - (6x-3)}{(x-2)^2} = \frac{9}{(x-2)^2} \text{ (0.5)}.$$

Logo,

$$f'(x) = \frac{9}{(x-2)^2} = 9 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = 1.$$

Como estamos considerando $x > 2$, o único ponto $x = 3$.

O ponto do gráfico é $(3, f(3)) = (3, -15)$ (0.3)

Q3.(1.5) Use o Teorema do Valor Intermediário (TVI) para mostrar que a equação

$$\mathrm{tg}(x) + 1 = 16x^2$$

tem uma solução no intervalo $(0, \frac{\pi}{4})$.

Resolução: A equação $\mathrm{tg}(x) + 1 = 16x^2$, pode ser escrita como $\mathrm{tg}(x) + 1 - 16x^2 = 0$. (0.2) Mais ainda se chamamos $f(x) = \mathrm{tg}(x) + 1 - 16x^2$ então devemos achar uma raiz da equação $f(x) = 0$. (0.2)

Avaliando f nos extremos do intervalo:

$$f(0) = 1 \quad \text{e} \quad f(\frac{\pi}{4}) = 1 + 1 - 16\frac{\pi^2}{16} = 2 - \pi^2. \text{ (0.2)}$$

Dado que $f(x)$ é uma função contínua no intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$ já que é soma de funções contínuas (0.3) e

$$f(\frac{\pi}{4}) = 2 - \pi^2 < 0 < 1 = f(0), \text{ (0.3)}$$

pelo teorema de Valor Intermediário, existe pelo menos um $c \in (0, \frac{\pi}{4})$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, c é solução da equação $\mathrm{tg}(x) + 1 - 16x^2 = 0$. (0.3)

Q4.(3.0) Calcule a derivada das seguintes funções, usando as regras de derivação:

(a) $f(x) = (5x^9 - 3x^5)(\sqrt[3]{x} - \text{sen}(x))$

(b) $g(x) = \dfrac{2\sqrt{x} - 7x^4}{8x^7 - 2^x}$

(c) $h(x) = 3e^{\cos(x)} + (x^3 - 1)^{51}$

Resolução:

(a) Pela regra do produto

$$f'(x) = (5x^9 - 3x^5)'(\sqrt[3]{x} - \text{sen}(x)) + (5x^9 - 3x^5)(\sqrt[3]{x} - \text{sen}(x))' \ (0.5)$$

$$= (45x^8 - 15x^4)(\sqrt[3]{x} - \text{sen}(x)) + (5x^9 - 3x^5)(\frac{1}{3}x^{2/3} - \cos(x)) \ (0.5)$$

(b) Pela regra do quociente:

$$g'(x) = \frac{(2\sqrt{x} - 7x^4)'(8x^7 - 2^x) - (2\sqrt{x} - 7x^4)(8x^7 - 2^x)'}{(8x^7 - 2^x)^2} \ (0.5)$$

$$= \frac{(\frac{1}{\sqrt{x}} - 28x^3)(8x^7 - 2^x) - (2\sqrt{x} - 7x^4)(56x^6 - \ln(2)2^x)}{(8x^7 - 2^x)^2} \ (0.5)$$

(c) Pela regra da soma e da cadeia,

$$h'(x) = (3e^{\cos(x)})' + ((x^3 - 1)^{51})' \ (0.4)$$

$$= -3\text{sen}(x)e^{\cos(x)} + 51(x^3 - 1)^{50}(x^3 - 1)'$$

$$= -3\text{sen}(x)e^{\cos(x)} + 51(x^3 - 1)^{50}3x^2. \ (0.6)$$