Q1.(2.5) Calcule

(a) (0.5) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x^2}}{x^2}$

(b) (1.0) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\text{sen } x}\right)$

(c) (1.0) $\lim_{x\to 0} (1-2x)^{1/x}$

Resolução:

(a) Como

$$\lim_{x\to+\infty} e^{3x^2} = +\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

então temos uma indeterminação do tipo "$\frac{\infty}{\infty}$" e portanto, pela Regra de L'Hospital, temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x^2}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6xe^{3x^2}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} 3e^{3x^2} = +\infty. \ (0.5)$$

(b) Observe que

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{\text{sen } x - x}{x\text{sen } x}. \ (0.2)$$

Como

$$\lim_{x\to 0}(\text{sen } x - x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to 0} x\text{sen } x = 0$$

temos que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } x - x}{x\text{sen } x}$ é uma indeterminação do tipo "$\frac{0}{0}$". Usando a Regra de L'Hospital concluímos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}. \ (0.4)$$

Observe que o limite da direita continua sendo uma indeterminação do tipo "$\frac{0}{0}$". Aplicando L'Hospital novamente obtemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x - x}{x\text{sen } x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\text{sen } x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\text{sen } x}{2\cos x - x\text{sen } x} = \frac{0}{2} = 0. \ (0.4)$$

Portanto, $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\text{sen } x}\right) = 0$

(c) Observe que

$$(1-2x)^{1/x} = e^{(1/x)\ln(1-2x)}. \ (0.2)$$

Como

$$\lim_{x\to 0} \ln(1-2x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to 0} x = 0$$

temos uma indeterminação da forma "$\frac{0}{0}$". Aplicando L'Hospital obtemos que

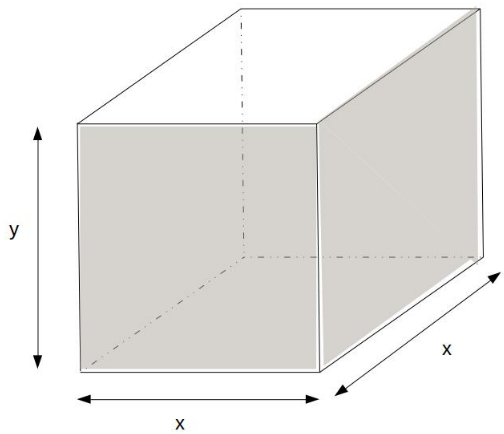
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2}{1-2x} = -2. \ (0.5)$$

Portanto, como a exponencial é contínua

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{(1/x)\ln(1-2x)} = \exp(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-2x)}{x}) = e^{-2}. \ (0.3)$$

Q2.(2.0) Você foi contratado para projetar um tanque de aço retangular sem tampa com capacidade de 500 m^3. O tanque deve ter base quadrada e será construído soldando chapas de aço de espessura fixa. Quais são as dimensões (largura e altura) que farão com que o tanque tenha o menor peso possível?

Resolução:



Como o peso do tanque é proporcional à quantidade de material gasto para construí-lo basta minimizar a quantidade de material para minimizar o peso. Temos que o tanque deve ter base quadrada e seu volume deve ser de $500m^3$. Vamos denotar por x um dos lados da base (como a base é quadrada todos lados são iguais) e por y a altura do tanque. Temos que $x, y > 0$ pois são comprimentos. Temos que o volume V do tanque é dado por $V = x^2y$. Além disso, a quantidade de material usado para construir o tanque é proporcional à área de superfície do tanque que é dada por $A = x^2 + 4xy$ (onde x^2 é a área da base e $4xy$ é a área dos quatro lados do tanque, lembre que o tanque não tem tampa). Portanto queremos encontrar o valor mínimo de A sabendo que $V = 500$. Usando que $V = 500$ obtemos que $y = \frac{500}{x^2}$ e substituindo obtemos a função a ser minimizada

$$A(x) = x^2 + \frac{2000}{x}, \quad x > 0.$$

Observe que $A'(x) = 2x - \dfrac{2000}{x^2} = \dfrac{2(x^3 - 1000)}{x^3}$. Vamos encontrar os pontos onde $A'(x) = 0$:

$$\frac{2(x^3 - 1000)}{x^3} = 0 \iff x^3 - 1000 = 0 \iff x = 10. \ (1.0)$$

Dessa forma o único ponto crítico de A é $x = 10$ (lembre que $x = 0$ não está no domínio de A). Como $A'(x) < 0$ para $0 < x < 10$ e $A'(x) > 0$ para $x > 10$ então A é decrescente para $0 < x < 10$ e crescente para $10 < x$ e com isso $x = 10$ é mínimo local e global. Lembrando que $y = \frac{500}{x^2}$ temos que $y = 5$ quando $x = 10$. Portanto, as dimensões que farão com que o tanque tenha o menor peso possível são $x = 10$ (largura) e $y = 5$ (altura). (1.0)

Q3.(2.0) Use a diferenciação logarítmica para calcular a derivada da seguinte função

$$y = (\cos x)^{1/x}$$

Resolução: Vamos usar a diferenciação logarítmica para calcular a derivada da seguinte função

$$y = (\cos x)^{1/x}.$$

Para isso, vamos aplicar o logaritmo nos dois lados da equação,

$$\ln y = \ln((\cos x)^{1/x}).$$

Pelas propriedades o logaritmo temos que

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln(\cos x).\ (0.3)$$

Derivando implicitamente o lado esquerdo obtemos

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\ \ (0.5)$$

e derivando o lado direito obtemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(\cos x)}{x}\right) = \frac{x\frac{(-\text{sen }x)}{\cos x} - \ln(\cos x)}{x^2} = -\frac{x\tan x + \ln(\cos x)}{x^2}.\ (0.8)$$

Portanto,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{x\tan x + \ln(\cos x)}{x^2},$$

e como $y = (\cos x)^{1/x}$ concluímos que

$$\frac{dy}{dx} = -(\cos x)^{1/x}\frac{x\tan x + \ln(\cos x)}{x^2}.\ (0.4)$$

Q4.(3.5) Considere a seguinte função
$$f(x) = \frac{16 - x^2}{(x-2)^2}.$$

(a) (0.5) Encontre o domínio de f, os pontos de intersecção do gráfico de f com os eixos e analise a simetria de f.

(b) (0.7) Caso existam, determine as assíntotas horizontais e verticais de f.

(c) (0.8) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f, seus pontos de máximo e mínimo e os seus valores.

(d) (0.8) Determine os intervalos onde f tem concavidade para cima e para baixo e os pontos de inflexão.

(e) (0.7) Esboce o gráfico de f usando as informações obtidas nos itens anteriores.

Resolução:

(a) O domínio de f é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$. (0.1)

Temos que $f(0) = 4$ e portanto o gráfico de f intercepta o eixo y em $y = 4$. (0.1)

Além disso, temos que
$$f(x) = 0 \iff 16 - x^2 = 0 \iff x = \pm 4,$$
portanto o gráfico de f intercepta o eixo x em $x = -4$ e $x = 4$. (0.1)

Como $f(-x) = \frac{16-x^2}{(-x-2)^2}$ então f não é nem par nem ímpar. (0.2)

(b) *Assíntotas horizontais:* Usando a Regra de L'Hospital duas vezes obtemos que
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{16 - x^2}{(x-2)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x}{2(x-2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2}{2} = -1$$
Portanto, $y = -1$ é assíntota horizontal. (0.4)
Assíntotas verticais: Como o denominador da função se anula em $x = 2$ temos que a reta $x = 2$ é candidata a ser assíntota vertical. Vamos analisar o limite de f quando x se aproxima de 2. Como $f(x) > 0$ para x próximo de 2 temos que
$$\lim_{x\to 2} \frac{16 - x^2}{(x-2)^2} = +\infty.$$
Logo, a reta $x = 2$ é a única assíntota vertical. (0.3)

(c) Para encontrar os intervalos de crescimento e decrescimento de f temos que calcular sua derivada. Pela regra do quociente temos que
$$f'(x) = \frac{-2x(x-2)^2 - (16-x^2)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)(-2x^2+4x-32+2x^2)}{(x-2)^4} = \frac{4(x-8)}{(x-2)^3}. \quad (0.2)$$

Portanto, temos a seguinte tabela

	$4(x-8)$	$(x-2)^3$	$f'(x)$
$(-\infty, 2)$	$-$	$-$	$+$
$(2, 8)$	$-$	$+$	$-$
$(8, +\infty)$	$+$	$+$	$+$

Logo, f é decrescente no intervalo $(2, 8)$ e crescente em $(-\infty, 2) \cup (8, +\infty)$. (0.4)

Observe que $f'(x) = 0$ em $x = 8$ e pelo teste da primeira derivada temos que $x = 8$ é um ponto de mínimo local. Logo, $f(8) = -4/3$ é valor de mínimo local. (0.2)

(d) Para determinar a concavidade do gráfico vamos calcular f''. Pela regra do quociente temos que

$$f''(x) = \frac{4(x-2)^3 - 4(x-8)3(x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{(x-2)^2(4(x-2) - 12(x-8))}{(x-2)^6} = \frac{8(11-x)}{(x-2)^4}. \text{ (0.2)}$$

Como o denominador de f'' é sempre positivo e o numerador é positivo no conjunto $(-\infty, 2) \cup (2, 11)$ e negativo em $(11, +\infty)$ temos que o gráfico de f tem concavidade para cima em $(-\infty, 2)$ e $(2, 11)$ e concavidade para baixo no intervalo $(11, +\infty)$. (0.4)

Além disso, como a concavidade do gráfico muda em $x = 11$ temos que este é um ponto de inflexão. (0.2)

(e) Esboço do gráfico de f: (0.7)