Q1. (4.0) Calcule as seguintes integrais

(a) (1.0) $\displaystyle\int (x-1)\sqrt{x+2}\,dx$

(b) (1.5) $\displaystyle\int e^x \cos(3x)\,dx$

(c) (1.5) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\,dx$

Resolução: (a) Substituição $u = x+2 \Rightarrow du = dx$ e $x = u-2$. (0.3) Portanto

$$\int (x-1)\sqrt{x+2}dx = \int (u-3)\sqrt{u}du = \int (u^{3/2} - 3u^{1/2})du \ (0.2)$$

$$= \frac{u^{5/2}}{5/2} - 3\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{5}(x+2)^{5/2} - 2(x+2)^{3/2} + C. \ (0.5)$$

(b) Seja $u = \cos(3x)$ e $dv = e^x dx \Rightarrow du = -3\text{sen}(3x)dx$ e $v = e^x$ (0.3). Logo, integrando por partes obtemos que

$$I = \int e^x \cos(3x)dx = \cos(3x)e^x - \int e^x(-3\sin(3x))dx = \cos(3x)e^x + 3\int \text{sen}(3x)e^x dx. \ (0.2)$$

Integramos por partes a integral que aparece no lado direito. Seja $u = \text{sen}(3x)$ e $dv = e^x dx \Rightarrow du = 3\cos(3x)dx$ e $v = e^x$: (0.3)

$$\int \text{sen}(3x)e^x dx = \text{sen}(3x)e^x - 3\int e^x \cos(3x)dx. \ (0.2)$$

Portanto

$$I = \cos(3x)e^x + 3\text{sen}(3x)e^x - 9I, \ (0.3)$$

donde segue que

$$\int e^x \cos(3x)dx = \frac{1}{10}(\cos(3x)e^x + 3\text{sen}(3x)e^x) + C. \ (0.2)$$

(c) Primeiro vamos fazer a substituição $u = e^x$, logo $du = e^x dx$, (0.3)e portanto

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-u^2}}du. \ (0.2)$$

Substituição trigonométrica $u = 2\text{sen}\theta$, com $\theta \in (-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow du = 2\cos\theta dx$ (0.3) e portanto

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-u^2}}du = \int \frac{2\cos\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta}}d\theta = \int \frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}d\theta = \theta + C, \ (0.5)$$

onde a penúltima igualdade segue do fato da função $\cos\theta$ ser positiva no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

Como $\theta = \arcsin\left(\frac{u}{2}\right)$ e $u = e^x$ segue que

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}dx = \arcsin\left(\frac{e^x}{2}\right) + C. \ (0.2)$$

Obs: esquecer a constante C: (-0.1)

Q2. (1.5) Discuta a convergência ou divergência da integral imprópria $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx.$

Resolução: $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{x(\ln x)^2} dx.$ (0.2)

Vamos calcular, para cada $t \geq 2$, a integral

$$\int_2^t \frac{1}{x(\ln x)^2} dx.$$

Substituição: $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$ (0.5) e portanto

$$\int_2^t \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int_{\ln 2}^{\ln t} \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u}\Big|_{\ln 2}^{\ln t} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln t}. \quad (0.3)$$

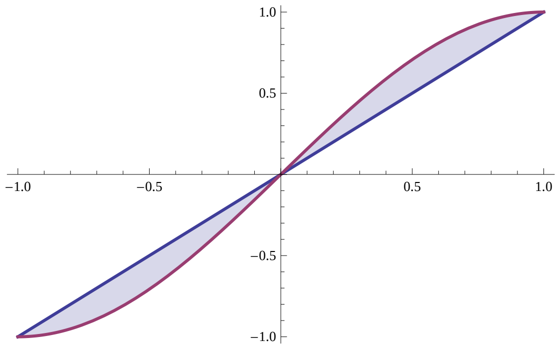
Logo,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln t}\right) = \frac{1}{\ln 2}. \quad (0.3)$$

Portanto a integral imprópria converge. (0.2)

Q3. (2.0) Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ e $y = x$ no intervalo $[-1, 1]$.

Resolução:



Primeiro observe que as curvas se interceptam nos pontos $(-1,-1)$, $(0,0)$ e $(1,1)$. Além disso, temos que $\operatorname{sen}(\pi x/2) \leq x$ no intervalo $[-1,0]$ e $x \leq \operatorname{sen}(\pi x/2)$ no intervalo $[0,1]$. (0.5) Portanto, área da região limitada pelas curvas é dada pela seguinte integral

$$A = \int_{-1}^{1} |\operatorname{sen}(\pi x/2) - x| dx = \int_{-1}^{0} (x - \operatorname{sen}(\pi x/2)) dx + \int_{0}^{1} (\operatorname{sen}(\pi x/2) - x) dx. \ (0.5)$$

Observe que

$$\int_{0}^{1} (\operatorname{sen}(\pi x/2) - x) dx = \left(-\frac{\cos(\pi x/2)}{\pi/2} - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{0}^{1} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}, \ (0.4)$$

e como a função $f(x) = x - \sin(\pi x/2)$ é ímpar então

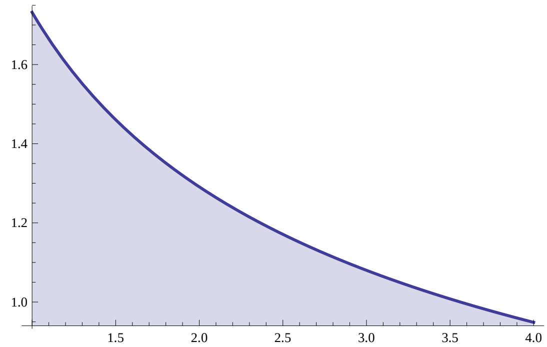
$$\int_{-1}^{0} (x - \operatorname{sen}(\pi x/2)) dx = -\int_{0}^{1} (x - \operatorname{sen}(\pi x/2)) dx = \int_{0}^{1} (\operatorname{sen}(\pi x/2) - x) dx. \ (0.4)$$

Portanto,

$$A = \int_{-1}^{1} |\operatorname{sen}(\pi x/2) - x| dx = 2 \int_{0}^{1} (\operatorname{sen}(\pi x/2) - x) dx = \frac{4}{\pi} - 1. \ (0.2)$$

Q4. (2.5) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação ao redor do eixo x da região limitada pela curva $y = \sqrt{\dfrac{4x+2}{x^2+x}}$ e o eixo x no intervalo $[1, 4]$.

Resolução:



O volume do sólido S é

$$V = \int_1^4 \pi f(x)^2 dx = \pi \int_1^4 \frac{4x+2}{x^2+x} dx. \ (0.8)$$

Por frações parciais. Observe que $x^2+x = x(x+1)$ (0.3). Sendo assim, devemos encontrar constantes A e B tais que

$$\frac{4x+2}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}. \ (0.5)$$

Igualando numeradores: $(A+B)x + A = 4x+2 \Rightarrow A = 2$ e $A+B = 4$, o que ocorre quando $A = 2$ e $B = 2$ (0.3). Logo,

$$\frac{4x+2}{x(x+1)} = \frac{2}{x} + \frac{2}{x+1}$$

e então

$$\begin{aligned} V = \pi \int_1^4 \left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x+1}\right) dx &= 2\pi \left(\int_1^4 \frac{1}{x} dx + \int_1^4 \frac{1}{x+1} dx\right) \\ &= 2\pi(\log(|x|)\,\big|_1^4 + \log(|x+1|)\big|_1^4) \\ &= 2\pi(\log 4 - \log 1 + \log 5 - \log 2) = 2\pi \log(10). \ (0.6) \end{aligned}$$