Q1. (2.0) (a) Calcule a integral

$$\int_{-1}^{2} |x - x^2|\, dx$$

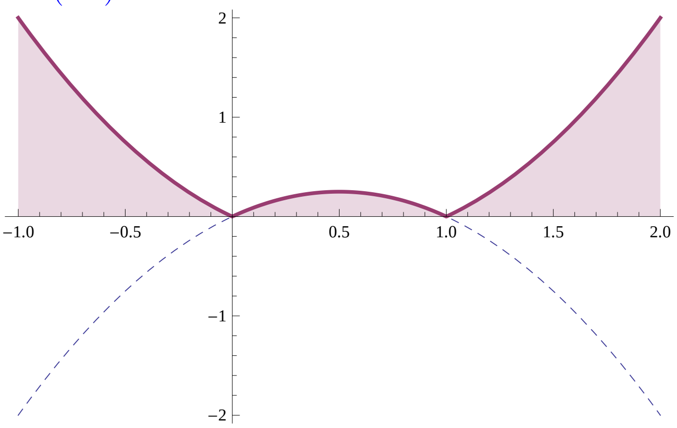
e esboce a região cuja área a integral representa.

Resolução: Temos que

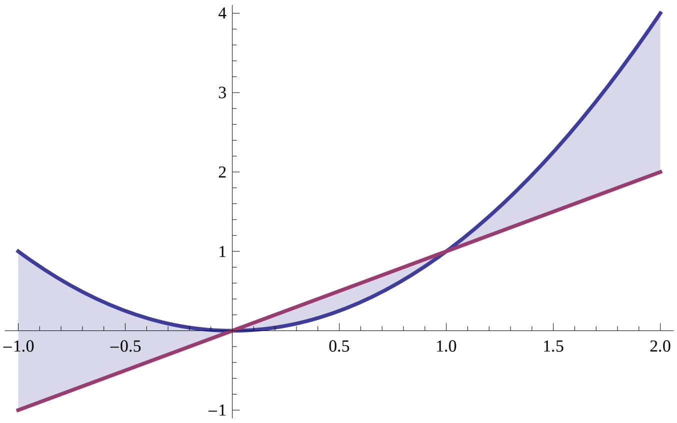
$$\int_{-1}^{2} |x - x^2|\, dx = \int_{-1}^{0} (x^2 - x)\, dx + \int_{0}^{1} (x - x^2)\, dx + \int_{1}^{2} (x^2 - x)\, dx \ \textcolor{blue}{(1.0)}$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2} = \frac{11}{6} \ \textcolor{blue}{(0.5)}$$

Esboço da região: (0.5)



ou



Q2. (4.0) Calcule as seguintes integrais

(a) (1.0) $\displaystyle\int \frac{5t}{5+2t^2}dt$

(b) (1.5) $\displaystyle\int e^{2x}\text{sen}(x)\,dx$

(c) (1.5) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x^4}dx$

Resolução:

(a) Substituição: $u = 5+2t^2 \Rightarrow du = 4tdt$ (0.4). Logo

$$\int \frac{5t}{5+2t^2}dt = \frac{5}{4}\int \frac{4t}{5+2t^2}dt \overset{(0.3)}{=} \frac{5}{4}\int \frac{1}{u}du = \frac{5}{4}\ln|u| + C = \frac{5}{4}\ln|5+2t^2| + C. \ (0.3)$$

(b) Integração por partes: $u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x}dx;\ dv = \text{sen}x dx \Rightarrow v = -\cos x$ (0.3) . Logo

$$I = \int e^{2x}\text{sen}(x)\,dx = -e^{2x}\cos x - 2\int -\cos x e^{2x}dx = -e^{2x}\cos x + 2\int \cos x e^{2x}dx. \ (0.2)$$

Integração por partes na última integral: $u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x}dx;\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \text{sen}x$ (0.3), assim

$$\int \cos x e^{2x}dx = e^{2x}\text{sen}x - 2\int e^{2x}\text{sen}x. \ (0.2)$$

Portanto

$$I = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\text{sen}x - 4\int e^{2x}\text{sen}x = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\text{sen}x - 4I \ (0.3)$$

$$\Rightarrow 5I = e^{2x}(2\text{sen}x - \cos x) \Rightarrow I = \frac{1}{5}e^{2x}(2\text{sen}x - \cos x) + C. \ (0.2)$$

(c) Como $x^2 + x^4 = x^2(1+x^2)$, (0.3) por frações parciais

$$\frac{1}{x^2+x^4} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2} = \frac{Ax(1+x^2) + B(1+x^2) + Cx^2}{x^2(1+x^2)} \ (0.5)$$

Igualando numeradores: $Ax(1+x^2) + B(1+x^2) + Cx^2 = 1 \Rightarrow A = 0,\ B = 1,\ C = 0, D = -1$ (0.3). Assim

$$\int \frac{1}{x^2+x^4}dx = \int \Big(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\Big)dx = -\frac{1}{x} - \arctan(x) + C. \ (0.4)$$

Obs: esquecer a constante C: (-0.1)

Q3. (1.5) Discuta a convergência ou divergência da integral imprópria $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx$.

Resolução: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^{t} \frac{\ln x}{x} = I.$ (0.2)

Calculemos $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} dx$ por substituição: $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$; (0.5)

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2} \ln^2 x + C \text{ (0.3)}.$$

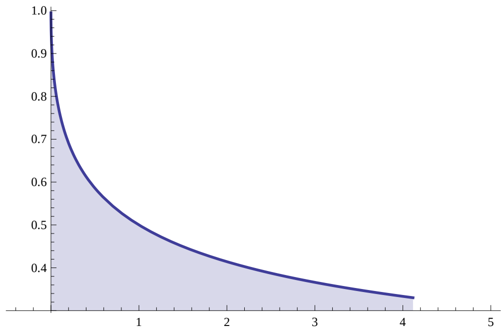
Logo,

$$I = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2} \ln^2 x \Big|_1^t = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2} (\ln^2 t - \ln 1) = +\infty. \text{ (0.3)}$$

Portanto a integral diverge. (0.2)

Q4. (2.5) Considere a região plana delimitada pela curva $y = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$, pelos eixos coordenados e pela reta $x = 4$. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação dessa região em torno do eixo x.

Resolução:



O volume é dado por

$$V = \pi \int_0^4 \Big(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\Big)^2 dx. \ (0.8)$$

Calculemos $I = \displaystyle\int \Big(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\Big)^2 dx$ por substituição $u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow 2udu = dx \quad (0.4)$. Logo

$$I = \int \frac{2u}{(1+u)^2} du. \ (0.2)$$

Fazendo $z = u + 1 \Rightarrow u = z - 1 \Rightarrow du = dz \quad (0.3)$ temos

$$I = 2\int \frac{z-1}{z^2} dz = 2\int \Big(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\Big) dz = 2(\ln|z| + \frac{1}{z}) + C = 2\ln|u+1| + \frac{2}{u+1} + C$$

$$= 2\ln|1+\sqrt{x}| + \frac{2}{1+\sqrt{x}} + C \ (0.6).$$

Agora,

$$V = \pi \int_0^4 \Big(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\Big)^2 dx = \pi\Big(2\ln|1+\sqrt{x}| + \frac{2}{1+\sqrt{x}}\Big)\Big|_0^4 = \pi(\ln 9 - \frac{4}{3}). \ (0.2)$$