Q1. (3.0) Calcule as seguintes integrais

(a) (1.0) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4(x)\cos^3(x)\,dx$

(b) (1.0) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2+x-2}\,dx$

(c) (1.0) $\displaystyle\int e^x(x+1)\cos(xe^x)\,dx$

Resolução:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4(x)\cos^3(x)x\;dx = \int \operatorname{sen}^4(x)(1-\operatorname{sen}^2(x))\cos x\;dx = I.$ (0.2)
Substituição: $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x dx.$ (0.3)
Assim,

$$I = \int u^4(1-u^2)du = \int (u^4-u^6)du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C = \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5(x) - \frac{1}{7}\operatorname{sen}^7(x) + C. \text{ (0.5)}$$

(b) Como $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$ (0.2) , por frações parciais

$$\frac{2}{x^2+x-2} = \frac{2}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}. \text{ (0.3)}$$

Igualando numeradores: $2 = A(x+2) + B(x-1) \Rightarrow A = \frac{2}{3}$ e $B = -\frac{2}{3}$ (0.2). Logo

$$\int \frac{2}{x^2+x-2}\,dx = \int \Big(\frac{2}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{2}{3}\frac{1}{x+2}\Big)dx$$
$$= \frac{2}{3}(\ln|x-1| - \ln|x+2|) + C. \text{ (0.3)}$$

(c) Substituição: $u = xe^x \Rightarrow du = e^x x + e^x = e^x(x+1)$ (0.5) , logo

$$\int e^x(x+1)\cos(xe^x)\,dx = \int \cos(u)du = sen(u) + C = \operatorname{sen}(xe^x) + C. \text{ (0.5)}$$

Obs: esquecer a constante C: (-0.1)

Q2. (3.0) (1.5)(a) Calcule a integral $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$.

(1.5)(b) Discuta a convergência ou divergência da integral imprópria $\int_0^1 x^2 \ln(x)\, dx$.

Resolução: (a) Substituição trigonométrica: $x = \operatorname{sen} u$, $(u = \operatorname{arcsen} x) \Rightarrow dx = \cos u du$ (0.5). Assim,

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u} \cos u\, du = \int \cos^2 u\, du \ (0.2)$$

$$= \int \frac{1+\cos 2u}{2} du = \frac{1}{2}\int du + \frac{1}{2}\int \cos 2u\, du = \frac{u}{2} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} 2u}{2} + C \ (0.3)$$

$$= \frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} u \cos u + C = \frac{\operatorname{arcsen} x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C. \ (0.5)$$

(b) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \ln(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 x^2 \ln x\ dx = I.$ (0.2)

Integração por partes: $f = \ln x$, $g' = x^2 \Rightarrow f' = 1/x$, $g = x^3/3$. (0.3) Assim,

$$I \overset{(0.2)}{=} \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{3}x^3 \ln x\Big|_\epsilon^1 - \frac{1}{3}\int_\epsilon^1 x^3 \frac{1}{x}\, dx\right) = \frac{1}{3}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left([1^3 \ln 1 - \epsilon^3 \ln \epsilon] - \int_\epsilon^1 x^2\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(0 - \epsilon^3 \ln\epsilon - \frac{1}{3}x^3\Big|_\epsilon^1\right) = -\frac{1}{3}\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\underbrace{\epsilon^3 \ln\epsilon}_{'\to 0\cdot\infty'} + \frac{1}{3}[1^3 - \underbrace{\epsilon^3}_{\to 0}]\right) \ (0.3)$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\lim_{\epsilon\to 0^+}\underbrace{\frac{\ln\epsilon}{\epsilon^{-3}}}_{\to'\frac{\infty}{\infty}'} \overset{\text{L'H}}{=} -\frac{1}{9} - \frac{1}{3}\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\epsilon^{-1}}{-3\epsilon^{-4}} = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\lim_{\epsilon\to 0^+}\underbrace{\epsilon^3}_{\to 0} = -\frac{1}{9}. \ (0.5)$$

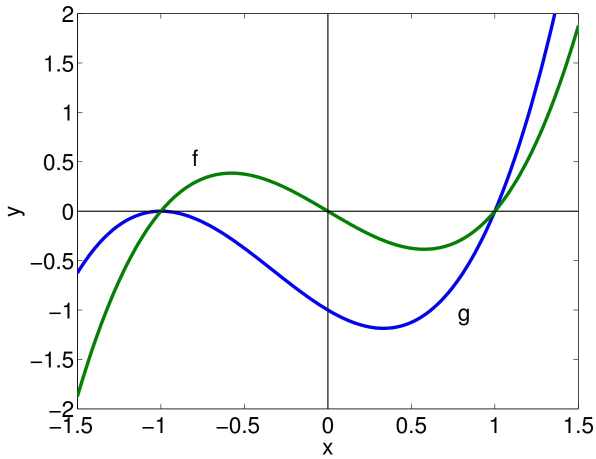
Q3. (2.0) Considere as funções $f(x) = x^3 - x$ e $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$. Calcule a área da região delimitada pelos gráficos de f e g.

Resolução: Os gráficos se interceptam em $f(x) = g(x)$, i.e., $x^3 - x = x^3 + x^2 - x - 1$, i.e., $x^2 - 1 = 0$, i.e., $x = 1$ e $x = -1$. (0.5) Temos $f(x) > g(x)$ $\forall -1 < x < 1$. (0.3)

Assim, a área procurada é dada pela integral

$$A \overset{(0.5)}{=} \int_{-1}^{1} \big(x^3 - x - (x^3 + x^2 - x - 1)\big)\, dx = \int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)\, dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{-1}^{1} \quad (0.3)$$

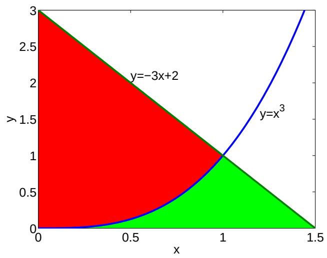
$$= \left(-\frac{1}{3} + 1\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\ u.a. \quad (0.4)$$



Q4. (2.0) A região do primeiro quadrante delimitada pelos gráficos de $y = -2x + 3$ e $y = x^3$ é girada ao redor do eixo y. Esboce a região e calcule o volume deste sólido de revolução.

Resolução: Duas possibilidades: Região vermelha ou verde.

Esboço das regiões (0.5)



1. Região vermelha

Integração por cascas cilíndricas:

Os gráficos se interceptam onde $-2x+3 = x^3$. A única intersecção destes gráficos acontece em $x = 1$. Em $(0, 1)$, temos $x^3 < -2x + 3$. (0.5) Assim, o volume procurado pode ser calculado pela integral

$$V \overset{(0.5)}{=} \int_0^1 2\pi x(-2x + 3 - x^3)dx = 2\pi \int_0^1 (-2x^2 + 3x - x^4)dx = 2\pi(-2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5})\Big|_0^1$$

$$= 2\pi \left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - \frac{1}{5})\right) = 2\pi \left(\frac{-20 + 45 - 6}{30}\right) = \frac{19}{15}\pi \; u.v. \; (0.5)$$

Integração por seções transversais:

Temos $x = \sqrt[3]{y}$ e $x = \dfrac{-y+3}{2}$. Intersecção em $x = y = 1$. Intersecção com o eixo y em $y = 0$ e $y = 3$. (0.5) Assim,

$$V \overset{(0.5)}{=} \int_0^1 \pi \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy + \int_1^3 \pi \left(\frac{-y+3}{2}\right)^2 dy = \int_0^1 \pi y^{2/3} dy + \int_1^3 \pi \frac{1}{4}\left(y^2 - 6y + 9\right) dy$$

$$= \pi \left[\frac{y^{5/3}}{5/3}\Big|_0^1 + \frac{1}{4}\left(\frac{y^3}{3} - 6\frac{y^2}{2} + 9y\right)\Big|_1^3 \right] = \pi \left[\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\left(9 - 27 + 27 - \frac{1}{3} + 3 - 9\right)\right] = \frac{19}{15}\pi u.v. \; (0.5)$$

2. Região verde

Integração por seções transversais:

Temos $x = \sqrt[3]{y}$ e $x = \dfrac{-y+3}{2}$ com $y \in [0,1]$. (0.5) Assim,

$$V \overset{(0.5)}{=} \int_0^1 \pi \left(\frac{-y+3}{2}\right)^2 dy - \int_0^1 \pi \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy = \int_0^1 \pi \frac{1}{4}\left(y^2 - 6y + 9\right) dy - \int_0^1 \pi y^{2/3} dy$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{y^3}{3} - 6\frac{y^2}{2} + 9y\right)\Big|_0^1 - \pi \left.\frac{y^{5/3}}{5/3}\right|_0^1 = \pi\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - 3 + 9\right) - \frac{3}{5}\right] = \frac{59}{60}\pi u.v. \ (0.5)$$

Integração por cascas cilíndricas:

Os gráficos se interceptam onde $-2x+3 = x^3$. A única intersecção destes gráficos acontece em $x = 1$. Intersecção com o eixo x em $x = 0$ e $x = \frac{3}{2}$. (0.5) Assim,

$$V \overset{(0.5)}{=} 2\pi \int_0^1 x x^3 dx + 2\pi \int_1^{\frac{3}{2}} x(-2x+3) dx = 2\pi \int_0^1 x^4 dx + 2\pi \int_1^{\frac{3}{2}} (-2x^2 + 3x) dx$$

$$= 2\pi \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 + 2\pi \left.\left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right)\right|_1^{\frac{3}{2}} = \frac{59}{60}\pi \ u.v. \ (0.5)$$