Q1. Calcule as seguintes integrais

(a) (1.2) $\displaystyle\int x^{\frac{5}{3}} \ln(x)\, dx$

(b) (1.2) $\displaystyle\int \text{sen}^5(x) \cos^6(x)\, dx$

(c) (1.3) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^3-4x^2+3x}\, dx$

Resolução:

(a) Integração por partes: $f = \ln x,\ g = x^{\frac{5}{3}} \Rightarrow f' = \frac{1}{x},\ g = \frac{3}{8}x^{8/3}$ (0.4). Assim,

$$\int x^{\frac{5}{3}} \ln(x)\, dx = \frac{3}{8}x^{8/3}\ln x - \int \frac{3}{8}x^{8/3}\frac{1}{x}dx \text{ (0.4)}$$

$$= \frac{3}{8}x^{8/3}\ln x - \frac{3}{8}\int x^{5/3}dx = \frac{3}{8}x^{8/3}\ln x - \frac{3^2}{8^2}x^{8/3} + C. \text{ (0.4)}$$

(b) $\displaystyle\int \text{sen}^5(x)\cos^6(x)\, dx = \int \text{sen}(x)\text{sen}^4(x)\cos^6(x)\, dx = \int \text{sen}(x)(1-\cos^2(x))^2\cos^6(x)dx$ (0.2). Substituição: $u = \cos x \Rightarrow du = -\text{sen} x dx$ (0.3) . Logo,

$$\int \text{sen}(x)(1-\cos^2(x))^2\cos^6(x)dx = -\int (1-u^2)^2u^6du = -\int (u^6 - 2u^8 + u^{10})du \text{ (0.4)}$$

$$= -(\frac{u^7}{7} - \frac{2}{9}u^9 + \frac{u^{11}}{11}) + C = -(\frac{\cos^7(x)}{7} - \frac{2}{9}\cos^9(x) + \frac{\cos^{11}(x)}{11}) + C. \text{ (0.3)}$$

(c) Temos que $x^3 - 4x^2 + 3x = x(x-1)(x-3)$ (0.3). Por frações parciais:

$$\frac{2x-1}{x^3-4x^2+3x} = \frac{2x-1}{x(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-3} \text{ (0.4)}$$

$$= \frac{A(x-1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x-3)}.$$

Igualando numeradores: $2x-1 = A(x-1)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-1) \Rightarrow A = -\frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{2},\ C = \frac{5}{6}$ (0.3)

$$\int \frac{2x-1}{x^3-4x^2+3x}dx = \int (-\frac{1}{3x} - -\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{5}{6}\frac{1}{x-3})dx$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{5}{6}\ln|x-3| + C. \text{ (0.3)}$$

Obs: esquecer a constante C: (-0.1)

Q2. (1.3)(a) Discuta a convergência ou divergência da integral imprópria $\displaystyle\int_5^\infty \frac{1}{(x-1)^{7/2}}\,dx$.
(1.0)(b) Calcule a integral $\displaystyle\int [\ln(x)]^2\,dx$.

Resolução: (a) Temos que

$$\int_5^\infty \frac{1}{(x-1)^{7/2}}\,dx \overset{(0.2)}{=} \lim_{t\to+\infty}\int_5^t \frac{1}{(x-1)^{7/2}}\,dx \overset{(0.4)}{=} \lim_{t\to+\infty} -\frac{2}{5}\frac{1}{(x-1)^{5/2}}\Big|_5^t$$

$$= -\frac{2}{5}\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{(t-1)^{5/2}} - \frac{1}{4^{5/2}} = \frac{1}{80}.\ (0.5)$$

Portanto, a integral imprópria converge. (0.2)

(b) Substituição: $u = \ln x$ ou $x = e^u \Rightarrow e^u du = dx$. Assim

$$\int [\ln(x)]^2\,dx = \int u^2 e^u du\ (0.3)$$

Integração por partes: $f = u^2,\ g' = e^u \Rightarrow f' = 2u,\ g = e^u$ portanto

$$\int u^2 e^u du = u^2 e^u - \int 2ue^u du.\ (0.3)$$

Integração por partes de novo: $f = u,\ g' = e^u \Rightarrow f' = 1,\ g = e^u$. Assim

$$\int ue^u du = ue^u - \int e^u du = ue^u - e^u + C\ (0.3).$$

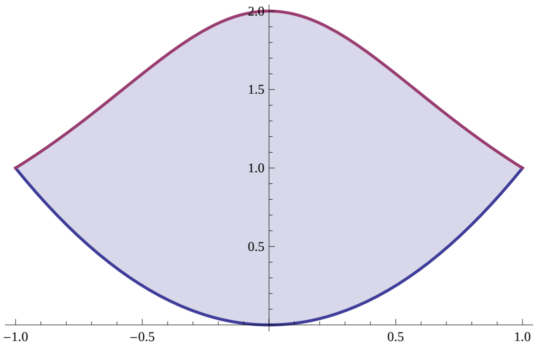
Logo,

$$\int [\ln(x)]^2\,dx = u^2e^u - 2(ue^u - e^u) + C = (\ln x)^2 x - 2(x\ln x - x) + C.\ (0.1)$$

Q3. (2.0) Considere as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$. Calcule a área da região limitada pelos gráficos de f e g no intervalo $[-1, 1]$.

Resolução: Temos que os gráficos de f e g se interceptam quando $f(x) = g(x)$. Então

$$x^2 = \frac{2}{1+x^2} \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1. \ (0.5)$$



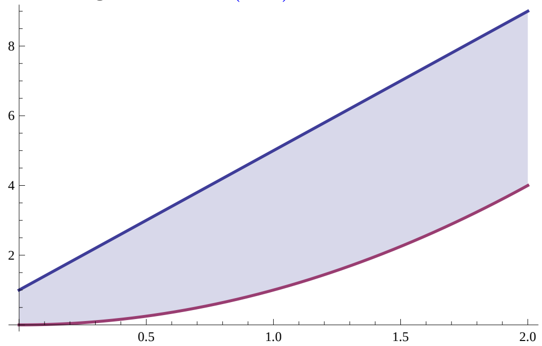
Além disso, $\dfrac{2}{1+x^2} \leq x^2$ no intervalo $[-1, 1]$ (0.3) . Portanto, a área é dada por

$$A \overset{(0.5)}{=} \int_{-1}^{1} \Big(\frac{2}{1+x^2} - x^2 \Big) dx = \Big(2\arctan(x) - \frac{x^3}{3} \Big) \Big|_{-1}^{1} \ (0.3)$$

$$= 2\arctan(1) - \frac{1}{3} - 2\arctan(-1) + \frac{(-1)^3}{3} = \pi - \frac{2}{3}. \ (0.4)$$

Q4. (2.0) Considere a região R limitada pela reta $y = 4x+1$ e a curva $y = x^2$ no intervalo $[0, 2]$. Esboce a região R e calcule o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo x.

Resolução: O esboço da região R: (0.5)



Como $4x+1 > x^2$ no intervalo $[0, 2]$, (0.2) o volume do sólido de revolução é dado por

$$V \overset{(0.8)}{=} \pi \int_0^2 \Big((4x+1)^2 - (x^2)^2 \Big) dx = \pi \int_0^2 (16x^2 + 8x + 2 - x^4) dx$$

$$= \pi \Big(\frac{16}{3} x^3 + 4x^2 + x - \frac{x^5}{5} \Big) \Big|_0^2 = \pi \Big(\frac{182}{3} - \frac{32}{5} \Big). \text{ (0.5)}$$