Q1.(2.0) Encontre todos os números reais x que satisfazem a desigualdade:

$$|x| - |x-2| < x.$$

Solução: Vamos dividir a resolução nos casos $x \geq 2$ e $x < 2$.
CASO A: $x \geq 2$. Aqui também temos $x > 0$. Assim,

$$|x| - |x-2| < x \Leftrightarrow x - (x-2) < x \Leftrightarrow x > 2.$$

Isso significa portanto que devemos ter $x > 2$. (0.5)
CASO B: $x < 2$. Neste caso,

$$|x| - |x-2| < x \Leftrightarrow |x| + (x-2) < x \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2. \text{ (1.0)}$$

Reunindo as informações contidas nos Casos A e B, vemos que o conjunto solução é dado por

$$\{x \in \mathbb{R}; -2 < x \text{ e } x \neq 2\} \text{ (0.5)}.$$

Q2.(2.5) Sem usar a regra de L'Hospital, calcule o limite ou prove que não existe:

(0.8)(a) $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

(0.8)(b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x(x^2-1)}{|x^2-1|}$

(0.9)(c) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1-e^x}{1+2e^x}$

Solução: (a) Notando que (para $x \neq 5$)

$$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{(\sqrt{x-1}-2)}{x-5}.\frac{(\sqrt{x-1}+2)}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{x-5}{(x-5)\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+2}, \ (0.6)$$

obtemos

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}. \ (0.2)$$

(b) Primeiramente observemos que se $x > 1$ temos $x^2 - 1 > 0$. Assim,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x(x^2-1)}{|x^2-1|} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} x = 1. \ (0.3)$$

Por outro lado, se $0 < x < 1$, temos $x^2 - 1 < 0$. Logo,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x(x^2-1)}{|x^2-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x(x^2-1)}{-(x^2-1)} = \lim_{x\to 1^-} -x = -1. \ (0.3)$$

Como os limites laterais existem e são distintos segue que o limite não existe. (0.2)

(c) Notando que

$$\frac{1-e^x}{1+2e^x} = \frac{1-e^x}{1+2e^x}.\frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+2} \ (0.5)$$

e lembrando que

$$\lim_{x\to +\infty} e^{-x} = 0, \ (0.2)$$

obtemos

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1-e^x}{1+2e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+2} = -\frac{1}{2}. \ (0.2)$$

Q3.(1.5) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$x^2\cos^2(x) \leq f(x) \leq x\,\mathrm{sen}(x) \quad \text{para todo } x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Mostre que f é contínua em $x = 0$.

Solução: Devemos mostrar que f está definida em $x = 0$, existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, e $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

É claro que 0 está no domínio de f, pois é dado que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Assim, f está definida em $x = 0$. Além disso, substituindo $x = 0$ na relação $x^2\cos^2(x) \leq f(x) \leq x\,\mathrm{sen}(x)$, obtemos $0\cos^2(0) \leq f(0) \leq 0\,\mathrm{sen}(0)$, ou seja, $f(0) = 0$. (0.5)

Também, lembrando que as funções x, x^2, $\mathrm{sen}(x)$ e $\cos^2(x)$ são contínuas em $x = 0$ (esta última é o produto de duas funções contínuas em $x = 0$), temos

$$\lim_{x\to 0} x^2\cos^2(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \,.\, \lim_{x\to 0}\cos^2(x) = 0 \text{ (0.3)}$$

e

$$\lim_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}(x) = \lim_{x\to 0} x \,.\, \lim_{x\to 0}\mathrm{sen}(x) = 0. \text{ (0.3)}$$

Portanto pelo teorema do confronto, obtemos que existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. (0.2)

Finalmente, observando que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0),$$

segue que f é contínua em $x = 0$. (0.2)

Q4.(1.5) Use o Teorema do Valor Intermediário (TVI) para mostrar que a equação

$$e^x = 2\cos(x)$$

possui uma solução positiva.

Solução: Defina $f(x) = e^x - 2\cos(x)$. Assim vemos que a equação dada equivale a $f(x) = 0$. Portanto, nosso problema equivale a encontrar um número positivo c tal que $f(c) = 0$. (0.4)

Seja I o intervalo fechado $[0, \pi/2]$. Por ser a diferença de funções contínuas temos que f é uma função contínua em I. (0.3) Além disso,

$$f(0) = -1 < 0 \qquad \text{e} \qquad f(\pi/2) = e^{\pi/2} > 0. \text{ (0.6)}$$

Consequentemente, $f(0) < 0 < f(\pi/2)$. Pelo TVI obtemos então que existe $c \in (0, \pi/2)$ satisfazendo $f(c) = 0$, mostrando assim o desejado. (0.2)

Q5.(2.5) Seja

$$g(x) = \sqrt{\frac{x^2+9}{x^2-9}}.$$

(0.5)(a) Determine o domínio da função g.

(2.0)(b) Encontre as assíntotas verticais e horizontais da função g. Calcule todos os limites necessários.

Solução: (a) Para que a expressão na raiz quadrada faça sentido devemos ter $\frac{x^2+9}{x^2-9} \geq 0$ e $x^2 - 9 \neq 0$. Como $x^2 + 9 > 0$ devemos ter portanto $x^2 - 9 > 0$, ou seja, $|x| > 3$. Portanto, o domínio de g é o conjunto

$$(-\infty, -3) \cup (3, +\infty). \quad (0.5)$$

(b) Primeiramente vamos determinar as *assíntotas verticais*. Como g é uma função contínua em seu domínio (pois é o quociente e composição de funções contínuas), as únicas retas candidatas a assíntotas verticais são $x = 3$ e $x = -3$. (0.2) Mas como

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+9}{x^2-9} = +\infty,$$

obtemos $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x) = +\infty$, donde segue que $x = 3$ é assíntota vertical. (0.4)

Também, sendo g uma função par obtemos $\lim\limits_{x\to -3^-} g(x) = +\infty$. Logo, $x = -3$ também é assíntota vertical. (0.4)

Agora vamos determinar (se existirem) as *assíntotas horizontais*. Como

$$\frac{x^2+9}{x^2-9} = \frac{1+\frac{9}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}}$$

e $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{9}{x^2} = 0$, obtemos

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \sqrt{\lim_{x\to +\infty} \frac{1+\frac{9}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}}} = 1 \quad (0.4)$$

Usando novamente que g é uma função par obtemos

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = 1. \quad (0.4)$$

Logo, $y = 1$ é a única assíntota horizontal de g. (0.2)