Q1.(2.0) Encontre todos os números reais x que satisfazem as desigualdades:

(a) $5|x-2| \leq 7$

(b) $|x| < x^3$

Solução:

(a) Note que

$$\begin{aligned} 5|x-2| \leq 7 &\Leftrightarrow |x-2| \leq 7/5 \\ &\Leftrightarrow -7/5 \leq x-2 \leq 7/5 \\ &\Leftrightarrow -7/5+2 \leq x \leq 7/5+2 \\ &\Leftrightarrow 3/5 \leq x \leq 17/5 \end{aligned}$$

A resposta é o conjunto: $[3/5, 17/5]$ (0.8) .

(b) Dividimos em três casos. Se $x = 0$, $x > 0$ e $x < 0$.

- Se $x = 0$, então não é verdade que $0 < 0^3 = 0$; (0.2)
- Se $x > 0$, então $|x| < x^3 \Leftrightarrow x < x^3 \Leftrightarrow 1 < x^2$, logo $x > 1$ (note que aqui é o caso positivo apenas) (0.4)
- Se $x < 0$, então $x^3 < 0$ e $|x| > 0$ logo nunca ocorre que $|x| < x^3$. (0.4)

A solução portanto é o conjunto $(1, \infty)$. (0.2)

Q2.(2.5) Sem usar a regra de L'Hospital, calcule o limite ou prove que não existe:

(0.8)(a) $\lim_{x\to 9} \dfrac{2\sqrt{x}-6}{x-9}$

(0.8)(b) $\lim_{x\to 0} \ x^6 \cos\Big(\dfrac{3}{x^3}\Big)$

(0.9)(c) $\lim_{x\to +\infty} \big(\ln(x) - \ln(x+1)\big)$

Solução:

(a) Para $x \neq 3$ temos

$$\frac{2\sqrt{x}-6}{x-9} = \frac{2(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{2}{(\sqrt{x}+3)}. \ (0.6)$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 9} \frac{2\sqrt{x}-6}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{2}{(\sqrt{x}+3)} = \frac{2}{(\sqrt{9}+3)} = \frac{2}{(6)} = 1/3. \ (0.2)$$

(b) Note que $-1 \leq \cos\Big(\dfrac{3}{x^3}\Big) \leq 1$ para todo $x \neq 0$ e sendo $x^6 \geq 0$, temos que

$$-x^6 \leq x^6 \cos\Big(\frac{3}{x^3}\Big) \leq x^6. \ (0.4)$$

Sabemos que $\lim_{x\to 0} x^6 = 0$ e $\lim_{x\to 0} -x^6 = 0$. (0.2) Portanto pelo Teorema do Confronto temos que $\lim_{x\to 0} x^6 \cos\Big(\dfrac{3}{x^3}\Big) = 0.$ (0.2)

(c) Note que

$$\ln(x) - \ln(x+1) = \ln(\frac{x}{x+1}) = \ln(\frac{1}{1+1/x}) \ (0.4)$$

Como $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$, podemos usar as propriedades do limite, pois sabemos que a função $\ln x$ é contínua no ponto 1 (0.2) logo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \ln(x) - \ln(x+1) &= \lim_{x\to\infty} \ln(\frac{\lim_{x\to\infty} 1}{\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} 1/x}) \\
&= \lim_{x\to\infty} \ln(\frac{1}{1+0}) = \ln(1) = 0. \ (0.3)
\end{aligned}$$

Q3.(2.0) Considere a função $f(x) = [[\text{sen}(x)]]$, onde $[[y]] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq y\}$ é a função maior inteiro.

Determine se a função f é contínua em $x = \pi$.

Solução: Vamos mostrar que $f(x)$ não é contínua em π. Se f fosse contínua deveríamos ter que $\lim_{x\to\pi} f(x) = f(\pi) = [[\text{sen}(\pi)]] = [[0]] = 0$. (0.5)

Temos que para $x \in (\pi/2, \pi)$, então $\text{sen}(x) \in (0, 1)$ e portanto para tais valores de x, $f(x) = 0$. Se $x \in (\pi, 3\pi/2)$, então $\text{sen}(x) \in (-1, 0)$ e portanto $f(x) = -1$. (0.5)

Logo

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x\to\pi^+} f(x) = -1 \text{ (0.5)}$$

portanto $\lim_{x\to\pi} f(x)$ não existe e assim f não é contínua neste ponto. (0.5)

Q4.(1.5) Mostre que a função

$$f(x) = \frac{7 - (16)^{\frac{1}{x}}}{1 + (16)^{\frac{1}{x}}}$$

assume o valor 1 no intervalo $(2, 4)$.

Dica: Use o Teorema do Valor Intermediário (TVI).

Solução:

Sabemos que $(16)^{\frac{1}{x}}$ é uma função contínua em $[2, 4]$, portanto pelas propriedades de soma e divisão de funções contínuas temos que

$$\frac{7 - (16)^{\frac{1}{x}}}{1 + (16)^{\frac{1}{x}}}$$

é uma função contínua dado que $1 + (16)^{\frac{1}{x}}$ não é zero em $[2, 4]$. (0.5)

Note também que

$$f(2) = \frac{7 - (16)^{\frac{1}{2}}}{1 + (16)^{\frac{1}{2}}} = \frac{7 - 4}{1 + 4} = \frac{3}{5} < 1 \text{ (0.3)}$$

$$f(4) = \frac{7 - (16)^{\frac{1}{4}}}{1 + (16)^{\frac{1}{4}}} = \frac{7 - 2}{1 + 2} = \frac{5}{3} > 1 \text{ (0.3)}$$

Portanto pelo teorema do valor intermediário como $1 \in (f(2), f(4)) = (3/5, 5/3)$ existe $c \in (2, 4)$ tal que $f(c) = 1$. (0.4)

Q5.(2.0) Determine as assíntotas verticais e horizontais da função

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x-4}.$$

Solução: *Assíntotas horizontais.* Para isso calculamos os limites quando $x \to \pm\infty$.

Se $x > 0$ então

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{x-4} = \frac{|x|(\sqrt{1+2/x^2})}{x(1-4/x)} = \frac{\sqrt{1+2/x^2}}{1-4/x} \quad (0.4).$$

Aplicando as propriedades do limite temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+2/x^2}}{1-4/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{\lim_{x\to\infty}(1+2/x^2)})}{\lim_{x\to\infty}(1-4/x)} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

Logo, $y = 1$ é assíntota horizontal para $x \to +\infty$. (0.3)

Agora olhamos o limite para quando $x \to -\infty$. Se $x < 0$ então note que

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{x-4} = \frac{-x(\sqrt{1+2/x^2})}{x(1-4/x)} = \frac{-\sqrt{1+2/x^2}}{1-4/x}$$

pois $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. (0.4)

Novamente aplicando as propriedades do limite temos que

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-(\sqrt{1+2/x^2})}{(1-4/x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-(\sqrt{\lim_{x\to-\infty}(1+2/x^2)})}{\lim_{x\to\infty}(1-4/x)} = -\frac{1+0}{1-0} = -1$$

Portanto, $y = -1$ é assíntota horizontal para $x \to -\infty$. (0.3)

Assíntotas verticais. O único candidato é quando $x = 4$. (0.2) Provemos que esta é de fato uma assíntota vertical. Note que para valor de $x > 4$ vale que

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{x-4} \geq \frac{1}{x-4},$$

aqui estamos usando que $\frac{1}{x-4}$ é positivo e que $\sqrt{x^2+2} \geq 1$. Como sabemos que

$$\lim_{x\to4^+} \frac{1}{x-4} = +\infty$$

significa que para valores arbitrariamente próximos de 4 pela direita a função fica arbitrariamente grande, em particular como $\frac{\sqrt{x^2+2}}{x-4} \geq \frac{1}{x-4}$ temos os valores de $\frac{\sqrt{x^2+2}}{x-4}$ ficam arbitrariamente grandes para x arbitrariamente próximos de 4 pela direta, logo

$$\lim_{x\to4^+} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x-4} = +\infty.$$

Portanto $x = 4$ é uma assíntota vertical. (0.4)

Assíntotas verticais. Outra resolução. O único candidato é quando $x = 4$. (0.2) Provemos que esta é de fato uma assíntota vertical. Se $x \to 4^+$, temos $x > 4$, ou seja, $x - 4 > 0$. Assim,

$$\lim_{x\to4^+} \frac{1}{x-4} = +\infty \quad \text{logo} \quad \lim_{x\to4^+} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x-4} = +\infty$$

pois $\lim_{x\to4^+} \sqrt{x^2+2} = \sqrt{18} > 0$. Logo, $x = 4$ é assíntota vertical. (0.4)

OBS: Também poderia ser calculado $\lim_{x\to4^-} g(x) = -\infty$. Mas, um dos limites já e suficiente para afirmar que em $x = 4$ temos uma assíntota vertical.