Q1.(2.0) Encontre todos os números reais x que satisfazem a desigualdade:

$$\left|\frac{4x-1}{2x-3}\right| < 3.$$

Solução

$4x-1=0$ em $x=1/4$, $\quad 2x-3=0$ em $x=3/2$.
Tendo em vista que $x \neq 3/2$, dividimos então o eixo x em três intervalos:

$$x > 3/2, \quad 1/4 \le x < 3/2, \quad \text{e } x < 1/4.$$

(i) $x > 3/2$: Temos $4x-1>0$ e $2x-3>0$.
Assim, $4x-1 < 3(2x-3) = 6x-9 \;\Rightarrow\; 8 < 2x \;\Rightarrow\; x > 4$
Resposta parcial: $\{x \in I\!R | x > 4\}$ (0.6)

(ii) $1/4 \le x < 3/2$: Temos Assim, $4x-1 \ge 0$ e $2x-3<0$.
$4x-1 < 3(-2x+3) = -6x+9 \;\Rightarrow\; 10x < 10 \;\Rightarrow\; x < 1$
Resposta parcial: $\{x \in I\!R | 1/4 \le x < 1\}$ (0.6)

(iii) $x < 1/4$: Temos Assim, $4x-1<0$ e $2x-3<0$.
$-4x+1 < 3(-2x+3) = -6x+9 \;\Rightarrow\; 2x < 8 \;\Rightarrow\; x < 4$
Resposta parcial: $\{x \in I\!R | x < 1/4\}$ (0.6)

Resposta final: $x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$ (0.2)

Q2.(2.5) Sem usar a regra de L'Hospital, calcule o limite ou prove que não existe:

(0.8)(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2-2x+4}-2}$

(0.8)(b) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{e^x+1}$

(0.9)(c) $\lim_{x\to 2} ([[x]]+[[3-x]])$, onde $[[y]] = \max\{n\in\mathbb{Z} : n\leq y\}$ é a função maior inteiro.

Solução

(a) Multiplicação pelo conjugado fornece

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{2x^2-2x+4}-2} &= \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{2x^2-2x+4}-2}\cdot\frac{\sqrt{2x^2-2x+4}+2}{\sqrt{2x^2-2x+4}+2}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2x(\sqrt{2x^2-2x+4}+2)}{2x^2-2x+4-4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x(\sqrt{2x^2-2x+4}+2)}{2x^2-2x}\\
(0.6) \quad &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x^2-2x+4}+2}{x-1} = \frac{\sqrt{0-0+4}+2}{-1} = \frac{2+2}{-1} = -4 \ (0.2)
\end{aligned}$$

(b) Uma vez que $0 \leq \operatorname{sen}^2(x) \leq 1$, temos

$$0 \leq \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^x+1} \ . \ (0.4)$$

Notamos que $\lim_{x\to+\infty} e^x = \infty$ e, portanto, $\lim_{x\to+\infty} e^x+1=\infty$, que implica $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x+1} = 0$. Pelo outro lado, $\lim_{x\to+\infty} 0 = 0$. (0.2)

Assim, pelo Teorema do Confronto, segue que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{e^x+1} = 0 \ . \ (0.2)$$

(c) Em $(1,2)$, temos $[[x]]=1$ e $[[3-x]]=1$, mas em $(2,3)$, temos $[[x]]=2$ e $[[3-x]]=0$. (0.4) Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} ([[x]]+[[3-x]]) = \lim_{x\to 2^-} (1+1) &= 2 \ ,\\
\lim_{x\to 2^+} ([[x]]+[[3-x]]) = \lim_{x\to 2^+} (2+0) &= 2 \ .
\end{aligned}$$

Uma vez que os limites laterais são iguais, temos

$$\lim_{x\to 2}([[x]]+[[3-x]]) = 2 \ . \ (0.5)$$

Q3.(2.0) Determine o valor a e defina $f(1)$ de modo que a função

$$f(x) = \begin{cases} ax+2, & x>1 \\ x^2-4x+1, & x<1 \end{cases}$$

se torne contínua.

Solução

Para que a função seja contínua em $x = 1$, necessitamos que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)\ .\ (0.2)$$

Temos

$$\begin{aligned} L^+ = \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} ax+2 = a+2\ ,\ (0.6) \\ L^- = \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} x^2-4x+1 = 1-4+1 = -2\ .\ (0.6) \end{aligned}$$

Portanto, para que o valor da função em $x = 1$ seja igual aos valores dos limites laterais, temos que definir $f(1) = L^- = -2$ e igualar $L^+ = a+2 = -2 = L^-$, i.e., $a = -4$. (0.6)

Q4.(1.5) Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 + 2 - \sqrt{x^4 + 3}$.

Mostre que f assume o valor $\dfrac{1}{2}$.

Dica: Use o Teorema do Valor Intermediário (TVI).

Solução

Teorema do Valor Intermediário (TVI): Se f for contínua em $[a, b]$ e $f(a) \leq N \leq f(b)$ ou $f(a) \geq N \geq f(b)$, então existe c em $[a, b]$ tal que $f(c) = N$.

Calculamos

$f(-1) = (-1)^3 + 2 - \sqrt{(-1)^4 + 3} = -1 + 2 - \sqrt{4} = 1 - 2 = -1$ (0.3)

$f(1) = 1^3 + 2 - \sqrt{1^4 + 3} = 1 + 2 - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1.$ (0.3)

Notamos que $f(x)$ é uma função algébrica e portanto contínua no seu domínio. (0.5)

Então, pelo TVI, uma vez que $f(-1) = -1 < 1/2 < 1 = f(1)$, existe um ponto $c \in [-1, 1]$ tal que $f(c) = 1/2$. (0.4)

Q5.(2.0) Encontre as assíntotas verticais e horizontais da seguinte função

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x - 3}.$$

Solução

Assíntotas horizontais:

Calculamos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x-3}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+5/x-3/x^2}{1+2/x-3/x^2} = \frac{2+0-0}{1+0-0} = 2 \ , \quad (0.4) \\
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+5x-3}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+5/x-3/x^2}{1+2/x-3/x^2} = \frac{2+0-0}{1+0-0} = 2 \ . \quad (0.4)
\end{aligned}$$

Portanto, a reta $y = 2$ é assíntota horizontal de f quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$. (0.2)

Assíntotas verticais:

Assíntotas verticais podem existir onde a função for descontínua. A função dada é descontínua nos zeros do denominador, i.e., $x = 1$ e $x = -3$. (0.2)

Observamos que em $x = -3$, o numerador també é zero, o que implica que

$$\lim_{x\to-3} \frac{2x^2+5x-3}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to-3} \frac{(2x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x\to-3} \frac{2x-1}{x-1} = \frac{-6-1}{-3-1} = \frac{7}{4} \ .$$

Portanto, f não possui uma assíntota vertical em $x = -3$.

Em $x = 1$, o númerador tem o valor de $2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 3 = 4 > 0$. O denominador é positivo quando $x > 1$ e negativo quando $-3 < x < 1$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1+} \frac{2x^2+5x-3}{x^2+2x-3} &= \text{“}\frac{4}{0^+}\text{”} = +\infty \\
\lim_{x\to1-} \frac{2x^2+5x-3}{x^2+2x-3} &= \text{“}\frac{4}{0^-}\text{”} = -\infty
\end{aligned}$$

Portanto, a reta $x = 1$ é assíntota vertical de f. (0.8)