Q1.(2.0) Encontre todos os valores de a tais que

$$\lim_{x \to a} \frac{x-2}{x+5} > 0.$$

Resolução: Temos que para $a \neq -5$,

$$\lim_{x \to a} \frac{x-2}{x+5} = \frac{a-2}{a+5}. \quad (0.4)$$

Caso 1: $a-2>0$ e $a+5>0$, ou seja $a>2$ e $a>-5$. Portanto $a>2$. (0.5)
Caso 2: $a-2<0$ e $a+5<0$, ou seja $a<2$ e $a<-5$. Portanto $a<-5$. (0.5)
Observe que para $a=-5$,

$$\lim_{x \to -5^+} \frac{x-2}{x+5} = -\infty \text{ e } \lim_{x \to -5^-} \frac{x-2}{x+5} = +\infty,$$

pois

$$\lim_{x \to -5^+} x-2 = -7, \quad \lim_{x \to -5^+} \frac{1}{x+5} = +\infty \text{ e } \lim_{x \to -5^-} \frac{1}{x+5} = -\infty \quad (0.4)$$

Logo, $a \in (-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$. (0.2)

Q2.(2.5) Sem usar a regra de L'Hospital, calcule o limite ou prove que não existe:

(0.8)(a) $\displaystyle\lim_{x\to 7}\frac{5-\sqrt{4+3x}}{7-x}$

(0.8)(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(x-1)^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right)$

(0.9)(c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}}$

Resolução:

(a) Racionalizando as raízes e aplicando diferença de quadrados temos

$$\frac{5-\sqrt{4+3x}}{7-x}=\frac{5-\sqrt{4+3x}}{7-x}\,\frac{5+\sqrt{4+3x}}{5+\sqrt{4+3x}}=(25-(4+3x))\frac{1}{(7-x)(5+\sqrt{4+3x})}$$

$$=3(7-x)\frac{1}{(7-x)(5+\sqrt{4+3x})}=\frac{3}{5+\sqrt{4+3x}}\ (0.6)$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 7}\frac{5-\sqrt{4+3x}}{7-x}=\frac{3}{5+\sqrt{4+3x}}=\frac{3}{5+5}=\frac{3}{10}.\ (0.2)$$

(b) Observe que $-1\leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right)\leq 1$ e portanto como $(x-1)^2\geq 0$, temos

$$-(x-1)^2\leq (x-1)^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right)\leq (x-1)^2.\ (0.4)$$

Como $\lim_{x\to 1}(x-1)^2=0$ e $\lim_{x\to 1}-(x-1)^2=0$ (0.2) então pelo Teorema do Confronto temos que $\lim_{x\to 1}(x-1)^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right)=0.$ (0.2)

(c) Temos que

$$\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{\sqrt[3]{x^3(1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3})}}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}}=\frac{x}{\sqrt{x^2}}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{x}{|x|}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}\ (0.4)$$

Como $x\to-\infty$, temos que $x<0$, assim $|x|=-x$. Logo,

$$\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}}=-\frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}.\ (0.2)$$

Agora, como $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0,\ n\in\mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{1}=-1.\ (0.3)$$

Q3.(2.0) Determine se a seguinte função é contínua em $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 2, \\ 3 & x = 2, \\ \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & x < 2. \end{cases}$$

Resolução: Calculemos os limites laterais para $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x - 1) = 4 - 1 = 3 \ (0.5)$$

e

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}. \ (0.2)$$

Agora,

$$x^2 - x - 2 = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Portanto, $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. Dessa forma,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} x + 1 = 2 + 1 = 3. \ (0.6)$$

Como os limites laterais são iguais, existe

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3. \ (0.2)$$

Por outro lado, $f(2) = 3$. Sendo assim, mostramos que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3 = f(2).$$

Portanto, a função é contínua em $x = 2$. (0.5)

Q4.(1.5) Use o Teorema do Valor Intermediário (TVI) para mostrar que a equação

$$\ln(x) = 3 - 2x$$

tem pelo menos uma raiz real.

Resolução: A equação $\ln(x) = 3-2x$, pode ser escrita como $\ln(x)-3+2x = 0$. Mais ainda se chamamos $f(x) = \ln(x) - 3 + 2x = 0$ então devemos achar uma raiz da equação $f(x) = 0$. (0.4)

Avaliando f em $x = 1$ e $x = 2$, temos

$$f(1) = -1 < 0 \quad \text{e} \quad f(2) = \ln(2) + 1 > 0. \text{ (0.6)}$$

Dado que $f(x)$ é uma função contínua no intervalo $[1, 2]$ já que é soma de funções contínuas (0.3), pelo teorema de Valor Intermediário, existe pelo menos um $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, c é solução da equação $\ln(x) - 3 + 2x = 0$. (0.2)

Q5.(2.0) Encontre as assíntotas verticais e horizontais da seguinte função

$$g(x) = \frac{2e^x}{e^x - 5}.$$

Resolução: *Assíntotas horizontais:* devemos calcular os limites para $x \to \pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{e^x - 5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1 - 5e^{-x}}. \quad (0.4)$$

Agora como $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{e^x - 5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1 - 5e^{-x}} = \frac{2}{1-0} = 2.$$

Portanto $y = 2$ é assíntota vertical para $x \to +\infty$. (0.3)

Agora como $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, logo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2e^x}{e^x - 5} = \frac{0}{0-5} = 0.$$

Portanto $y = 0$ é assíntota vertical para $x \to -\infty$. (0.5)

Assíntotas verticais: Como o numerador é sempre positivo, o único candidato a assíntota vertical é onde o denominador se anula, ou seja, quando $e^x - 5 = 0$ ou seja, $x = \ln 5$. (0.2)

Calculamos o limite lateral pela direita. Para $x \to \ln 5^+$, temos que $x > \ln 5$ ou seja, $e^x > 5$ pois a exponencial é crescente. Assim, $e^x - 5 > 0$,

$$\lim_{x\to\ln 5^+} \frac{1}{e^x - 5} = +\infty \text{ logo } \lim_{x\to\ln 5^+} \frac{2e^x}{e^x - 5} = +\infty.$$

Portanto, $x = \ln 5$ é assíntota vertical. (0.6)

Também poderíamos calcular o limite lateral pela esquerda: Para $x \to \ln 5^-$, temos que $x < \ln 5$ ou seja, $e^x < 5$ pois a exponencial é crescente. Assim, $e^x = 5 < 0$,

$$\lim_{x\to\ln 5^-} \frac{1}{e^x - 5} = -\infty \text{ logo } \lim_{x\to\ln 5^-} \frac{2e^x}{e^x - 5} = -\infty$$