Q1. (2,0) Calcule a derivada

(a) y' se $y + xe^y = x^2y$

(b) $m(x) = \dfrac{3x\cos(5x^2)}{e^{2x}}$

Solução: (a) Derivando ambos os lados da igualdade $y + xe^y = x^2y$ em relação a x e usando as regras da cadeia e do produto, obtemos

$$y' + e^y + xe^y y' = 2xy + x^2y' \quad (0.4) + (0.4)$$
$$\Longrightarrow y'(1 + xe^y - x^2) = 2xy - e^y \Longrightarrow y' = \frac{2xy - e^y}{1 + xe^y - x^2}. \quad (0.2)$$

(b) Usando a regra do quociente, temos

$$m'(x) = \frac{(3x\cos(5x^2))' e^{2x} - (e^{2x})'(3x\cos(5x^2))}{(e^{2x})^2}. \quad (0.4)$$

Agora, usando as regras do produto e da cadeia,

$$m'(x) = \frac{\Big(3\cos(5x^2) + 3x(-\operatorname{sen}(5x^2))10x\Big)e^{2x} - 2e^{2x}(3x\cos(5x^2))}{(e^{2x})^2}.$$
$$= \frac{3\cos(5x^2) - 30x^2\operatorname{sen}(5x^2) - 6x\cos(5x^2)}{e^{2x}} \quad (0.6)$$

Q2. (2.0) Calcule

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\ln\Big(1-\frac{1}{x}\Big)$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1+6x)^{\frac{1}{3x}}$

Solução: (a) Primeiro observemos que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\ln\Big(1-\frac{1}{x}\Big)=0$. Portanto temos uma indeterminação do tipo $0\cdot\infty$. Re-escrevemos

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\ln\Big(1-\frac{1}{x}\Big)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\Big(1-\frac{1}{x}\Big)}{\frac{1}{x}}$ temos uma indeterminação da forma $0/0$. (0.4)

Mas, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}\ln\Big(1-\frac{1}{x}\Big)=\frac{1}{1-\dfrac{1}{x}}.\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2-1}\quad\text{e}\quad\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{x}\Big)=-\frac{1}{x^2}.$$

Logo, pela regra de L'Hospital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} x\ln\Big(1-\frac{1}{x}\Big)&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\Big(1-\frac{1}{x}\Big)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{d}{dx}\ln\Big(1-\frac{1}{x}\Big)}{\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{x}\Big)}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2-1}.(-x^2)=-1\ \text{(0.6)}\end{aligned}$$

(b) Fazendo a mudança de variável, $y=6x$, vemos que se $x\to 0^+$ também temos $y\to 0^+$. Assim,

$$\lim_{x\to 0^+}(1+6x)^{\frac{1}{3x}}=\lim_{y\to 0^+}(1+y)^{\frac{2}{y}}=\Big(\lim_{y\to 0^+}(1+y)^{\frac{1}{y}}\Big)^2=e^2,$$

onde usamos que $f(x)=x^2$ é uma função contínua e o fato de $\displaystyle\lim_{y\to 0^+}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$. (1.0)

Alternativa: Temos uma forma indeterminada do tipo $1^{+\infty}$. Re-escrevemos

$$(1+6x)^{\dfrac{1}{3x}}=e^{\dfrac{\ln(1+6x)}{3x}}.\ \text{(0.2)}$$

No exponente temos uma forma indeterminada do tipo $0/0$, podemos aplicar l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+6x)}{3x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{6}{1+6x}}{3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{1+6x}=2\ \text{(0.6)}$$

Pela continuidade do exponencial

$$\lim_{x\to 0^+}(1+6x)^{\dfrac{1}{3x}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\dfrac{\ln(1+6x)}{3x}}=e^{\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+6x)}{3x}}=e^2.\ \text{(0.2)}$$

Q3. (2.0) Quantas retas tangentes à curva $y = \dfrac{x}{x+1}$ passam pelo ponto $(1,2)$? Determine as equações dessas retas tangentes.

Solução: Seja $f(x) = x/(x+1)$. Pela regra do quociente temos

$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.(0.5)$$

Assim, a reta tangente à curva em qualquer ponto $(a, f(a))$ é dada por

$$y - f(a) = f'(a)(x-a). \tag{1}$$

Substituindo os valores de $f(a)$ e $f'(a)$, obtemos

$$y - \frac{a}{a+1} = \frac{1}{(a+1)^2}(x-a).(0.5) \tag{2}$$

Agora, se impormos que a reta acima passe pelo ponto $(1,2)$, devemos substituir $x = 1$ e $y = 2$ em (2), donde resulta que

$$\begin{aligned} 2 - \frac{a}{a+1} = \frac{1}{(a+1)^2}(1-a) &\iff \frac{2a+2-a}{a+1} = \frac{1-a}{(a+1)^2} \\ &\iff a+2 = \frac{1-a}{a+1} \\ &\iff a^2+4a+1 = 0 \\ &\iff a = -2 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Disso segue que existem duas retas tangentes à curva dada que passam pelo ponto $(1,2)$, a saber, as retas tangentes nos pontos $(-2+\sqrt{3}, f(-2+\sqrt{3}))$ e $(-2-\sqrt{3}, f(-2-\sqrt{3}))$. Por fim, substituindo os valores de a em (2) obtemos as retas

$$y - \frac{(-2+\sqrt{3})}{-1+\sqrt{3}} = \frac{1}{(-1+\sqrt{3})^2}(x+2-\sqrt{3})$$

e

$$y - \frac{(2+\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}} = \frac{1}{(1+\sqrt{3})^2}(x+2+\sqrt{3})(1.0)$$

Q4. (2.0) Um fabricante de caixas deve produzir uma caixa fechada com um volume de $288cm^3$, onde a base é um retângulo com um comprimento três vezes maior que a largura. Ache as dimensões da caixa fabricada com o mínimo de material. Justifique a sua resposta.

Solução: Sejam x e y a largura e a altura da caixa, medidas em centímetros. A área total da caixa é portanto

$$A = 2.x.3x + 2.3x.y + 2.x.y = 6x^2 + 8xy.$$

Mas sabendo que o volume é $288cm^3$, devemos ter $x.y.3x = 288$, ou seja, $y = 96/x^2$ (é claro que $x > 0$). Assim, substituindo este valor y em A, obtemos

$$A = A(x) = 6x^2 + \frac{768}{x}.(1.0)$$

Logo, queremos minimizar a função A sabendo que $x > 0$. Notanto que

$$A'(x) = 12x - \frac{768}{x^2} = \frac{12x^3 - 768}{x^2}, \tag{3}$$

vemos que

$$A'(x) = 0 \iff 12x^3 - 768 = 0 \iff x^3 = 64 \iff x = 4,$$

ou seja, o único ponto crítico de A no intervalo $(0, \infty)$ é $x = 4$. Observando que $A'(x) < 0$ se $x < 4$ e $A'(x) > 0$ se $x > 4$, obtemos pelo teste da derivada primeira que, de fato, $x = 4$ é um ponto de mínimo absoluto de A. Isto significa que a caixa deve ter $4cm$ de largura, $12cm$ de comprimento e $6cm$ de altura. (1.0)

Q5. (2.0) Determine os valores de c para os quais a função

$$f(x) = cx + \frac{1}{x^2 + 3}$$

é crescente em $(-\infty, \infty)$.
Solução: Sabemos que se $f'(x) > 0$ em $(-\infty, \infty)$ então f é crescente em $(-\infty, \infty)$. Mas,

$$f'(x) = c - \frac{2x}{(x^2 + 3)^2}.$$

Portanto, impondo que $f'(x) > 0$, devemos ter

$$c > \frac{2x}{(x^2 + 3)^2}, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

o que significa que c deve ser maior que o valor máximo absoluto (se existir) da função

$$g(x) = \frac{2x}{(x^2 + 3)^2} \qquad x \in (-\infty, \infty).(1.0)$$

Observe que $g'(x)$ existe para todo $x \in (-\infty, \infty)$ e

$$g'(x) = \frac{2(x^2+3)^2 - 2(x^2+3).2x.2x}{(x^2+3)^4} = \frac{2(x^2+3) - 8x^2}{(x^2+3)^3} = \frac{6 - 6x^2}{(x^2+3)^3}$$

Logo,

$$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow 6 - 6x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 1,$$

donde resulta que os únicos pontos críticos de g são $x = -1$ e $x = 1$. Note que $g(-1) = -1/8$ e $g(1) = 1/8$. Notando que o sinal de g' muda de positivo para negativo em $x = 1$, obtemos pelo teste da derivada primeira que $1/8$ é o valor máximo absoluto de g.

Finalmente, do observado acima segue se $c > 1/8$ então f será crescente em $(-\infty, \infty)$. (1.0)