Q1. (2.0) Calcule a derivada das seguintes funções

(a) $g(x) = x^3 \ln(x) e^{x^2}$

(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{e^x + x^4}}{\sqrt{x^2+1}}$

Solução:

(a) Pela regra do produto e da cadeia, temos que

$$g'(x) = 3x^2 \cdot \ln(x) \cdot e^{x^2} + x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot e^{x^2} + x^3 \cdot \ln(x) \cdot 2x \cdot e^{x^2} = x^2 e^{x^2}[3\ln(x) + 1 + 2x^2 \ln(x)].$$

(0.3)+(0.3)+(0.4) = (1.0)

(b) Pela regra do quociente e da cadeia,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3}(e^x + x^4)^{-\frac{2}{3}}(e^x + 4x^3)\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{e^x + x^4}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

(0.5)+(0.5)=(1.0)

Alternativa: Por diferenciação logarítmica: temos que

$$\ln[f(x)] = \frac{1}{3}\ln(e^x + x^4) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1), \ (0.3)$$

logo

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e^x + x^4} \cdot (e^x + 4x^3) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x, \ (0.5)$$

ou seja

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{e^x + x^4}}{\sqrt{x^2+1}} \left[\frac{e^x + 4x^3}{3(e^x + x^4)} - \frac{x}{x^2+1} \right] = \frac{x^2 e^x - 3xe^x + e^x + x^5}{3(e^x + x^4)^{2/3}(x^2+1)^{3/2}}. \ (0.2)$$

Q2. (2.0) Calcule

(a) $\lim_{x\to+\infty} (1+2x)^{\frac{1}{(2\ln x)}}$

(b) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)$

Solução:

(a) Observamos que temos uma forma indeterminada do tipo $(+\infty)^0$, todavia pela definição do exponencial como função inversa do logaritmo, podemos re-escrever

$$(1+2x)^{\dfrac{1}{(2\ln(x))}} = e^{\dfrac{\ln(1+2x)}{2\ln(x)}}. \ (0.2)$$

No exponente temos uma forma indeterminada do tipo $+\infty/+\infty$, portanto podemos aplicar l'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+2x)}{2\ln(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{1+2x}}{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+2x}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x}\cdot\frac{1}{1/x+2} = \frac{1}{2}. \ (0.6)$$

Pela continuidade do exponencial

$$\lim_{x\to+\infty} (1+2x)^{\dfrac{1}{(2\ln x)}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\dfrac{\ln(1+2x)}{2\ln(x)}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+2x)}{2\ln(x)}} = e^{1/2}. \ (0.2)$$

(b) Observamos que temos uma forma indeterminada do tipo $+\infty-\infty$, todavia, subtraindo, temos que

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x\operatorname{sen} x}, \ (0.2)$$

que é uma forma indeterminada do tipo $0/0$, logo podemos aplicar l'Hôpital e obter

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - \cos x + x\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x}, \ (0.4)$$

que dá nos, outra vez, uma forma indeterminada do tipo $0/0$ e aplicando de novo l'Hôpital concluímos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + x\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x + x\cos x}{\cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x} = \frac{0}{2-0} = 0. \ (0.4)$$

Q3. (2.0) Encontre uma parábola $y = ax^2 + bx + c$ que passe pelo ponto $(1, 4)$ e cujas retas tangentes em $x = -1$ e $x = 5$ tenham inclinações 6 e -2, respectivamente.

Solução:

Vamos calcular a inclinação da parábola. Derivando $y'(x) = 2ax + b$. Sabemos que $6 = y'(-1) = -2a + b$ e $-2 = y'(5) = 10a + b$. Logo,

$$\begin{cases} 6 = -2a + b \\ -2 = 10a + b. \end{cases} \qquad (0.8)$$

Da primeira equação $b = 6 + 2a$ e substituindo na segunda equação, temos $-2 = 10a + 6 + 2a$ donde $a = -\dfrac{2}{3}$ e portanto, $b = \dfrac{14}{3}$. (0.6)

Como a parábola deve passar por por $(1, 4)$ temos que $4 = y(1) = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{14}{3} + c = 4 + c$. Portanto $c = 0$ (0.4) e obtemos a parábola $y = -\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{14}{3}x$. (0.2)

Q4. (2.0) Uma caixa fechada com base quadrada vai ter um volume de 2000 cm^3. O material da tampa e da base vai custar R$ 3,00 por cm^2 e o material para os lados R$ 1,50 por cm^2 . Encontre as dimensões da caixa de modo que o custo seja mínimo.

Solução:

Denotamos com a o lado do quadrado da base e com h a altura da caixa. Então, a área de base e da tampa será $A_{b+t} = 2a^2$, enquanto a área lateral da caixa será $A_l = 4ah$. O custo C da caixa será dado por

$$C = 3A_{b+t} + 1,5A_l = 6a^2 + 6ah.$$

Considerando que o volume da caixa deve ser igual a 2000 cm^3, temos que $2000 = V = a^2h$, logo $h = 2000/a^2$. Portanto, obtemos a função custo a minimizar

$$C = C(a) = 6a^2 + 6a \cdot \frac{2000}{a^2} = 6\left(a^2 + \frac{2000}{a}\right), \qquad a > 0. \ (1.0)$$

Vamos derivar a função custo, obtendo

$$C'(a) = 6\left(2a - \frac{2000}{a^2}\right) = 12 \cdot \frac{a^3 - 1000}{a^2}. \text{ Assim, } C'(a) = 0 \Longrightarrow a = \sqrt[3]{1000} = 10.$$

Como $C'(a) < 0$ quando $a < 10$ e $C'(a) > 0$ quando $a > 10$, portanto $a = 10$ é ponto de mínimo para C. Além disso, nessas condições a altura será dada por

$$h = \frac{2000}{a^2} = \frac{2000}{100} = 20,$$

e concluímos que as dimensões requeridas são o lado $a = 10$ cm e a altura $h = 20$ cm. (1.0)

Q5. (2.0) Suponha que a derivada de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja

$$f'(x) = (x-1)^2(x-2)(x-4).$$

Em que pontos, se houver, o gráfico de f apresenta um mínimo local, um máximo local ou um ponto de inflexão?

Solução:

Considerando que $f'(x) = 0$ quando $x = 1$, $x = 2$ ou $x = 4$, os pontos críticos são 1, 2, 4. Vamos aplicar o teste de crescimento/decrescimento, estudando o sinal da função derivada

Termos	$x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 4$	$x > 4$
$(x-1)^2$	+	+	+	+
$x-2$	-	-	+	+
$x-4$	-	-	-	+
$f'(x)$	+	+	-	+

Observamos que o sinal de f' não muda em $x = 1$. Como o sinal de f' muda de positivo para negativo em $x = 2$, temos que $x = 2$ é um ponto de máximo local; como o sinal de f' muda de negativo para positivo em $x = 4$, temos que $x = 4$ é um mínimo local. (0.8)

Agora calculamos a derivada segunda da função,

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2(x-1)(x-2)(x-4) + (x-1)^2(x-4) + (x-1)^2(x-2) \\ &= (x-1)(4x^2 - 20x + 22). \ (0.6) \end{aligned}$$

Observamos que $f''(x) = 0$ quando $x = 1$ ou $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{3}}{2}$. Analisando o sinal de derivada segunda,

$f'' < 0$ em $(-\infty, 1)$ e $\left(\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{3}}{2}\right)$ portanto f tem concavidade para baixo

$f'' > 0$ em $(1, \dfrac{5-\sqrt{3}}{2})$ e $(\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$ portanto f tem concavidade para cima.

Logo, $x = 1$ e $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{3}}{2}$ são pontos de inflexão. (0.6)