Q1. (2,0) Calcule a derivada

(a) y' se $2(x^2+y^2)^2 = x^2y^2$

(b) $v(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) - \sqrt{3\pi+7}$

Resolução:

(a) Diferenciação implícita:

$$4(x^2+y^2)(2x+2yy') = 2xy^2 + x^2 2yy' \ (0.4) + (0.4) \Rightarrow$$

$$[8(x^2+y^2)y - 2x^2y]y' = [2y^2 - 8(x^2+y^2)]x$$

logo

$$y' = -\frac{(4x^2+3y^2)}{(3x^2+4y^2)}\frac{x}{y} \ (0.2)$$

(b)

$$v'(x) = \sec^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' - 0 \ (0.6)$$

$$= \sec^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left(\cdot\frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}\right) = -\frac{2\sec^2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{(x-1)^2} \ (0.4)$$

Q2. (2.0) Calcule

(a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\operatorname{sen} x)}{(\pi-2x)^2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{2}{e^{2x}-1} - \dfrac{1}{x}\right)$

Resolução:

(a) $L = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\operatorname{sen} x)}{(\pi-2x)^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ — forma indeterminada (0.2)

L'Hôpital: $L = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-4(\pi-2x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ — forma indeterminada (0.4)

L'Hôpital: $L = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{-1}{(\operatorname{sen} x)^2}}{8} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{-1}{8(\operatorname{sen} x)^2} = -\dfrac{1}{8}$ (0.4)

(b) $L_3 = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{2}{e^{2x}-1} - \dfrac{1}{x}\right) = [\infty - \infty]$— forma indeterminada

$L_3 = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x - e^{2x} + 1}{x(e^{2x}-1)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$— forma indeterminada (0.4)

L'Hôpital: $L_3 = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2 - 2e^{2x}}{(e^{2x}-1) + x\cdot 2e^{2x}} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ — forma indeterminada (0.3)

L'Hôpital: $L_3 = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-4e^{2x}}{2e^{2x} + 2e^{2x} + 4xe^{2x}} = -\dfrac{4}{4} = -1$ (0.3)

Q3. (2.0) (a) Determine a reta tangente T à curva

$$y = -x^4 + 2x^2 + x$$

no ponto $(1, 2)$.
(b) Prove que a reta T é também tangente à curva em um outro ponto. Determine esse outro ponto.

Resolução: (a) Seja $f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$, então $f'(x) = -4x^3 + 4x + 1$. Assim, $f(1) = 2$ e $f'(1) = 1$. A equação da reta tangente T é

$$T(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 + 1(x - 1) = 1 + x. \text{ (0.8)}$$

(b) Para a reta T ser tangente à curva em outro ponto, devemos achar os x tais que

$$f'(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -4x^3 + 4x + 1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -4x(x^2 - 1) = 0.$$

Logo, $x = 0,\ x = -1$ ou $x = 1$. (0.5)

Para $x = 0$, temos que $f(0) = 0$ e $T(0) = 1$, como $f(0) \neq T(0)$, T não é tangente à curva em $(0, 0)$

Para $x = -1$, temos que $f(-1) = 0$ e $T(-1) = 0$. Portanto $y = 1 + x$ é a reta tangente à curva em $(-1, 0)$. (0.7)

Q4. (2.0) Um galpão deve ser construído com uma área retangular de 800 m^2. É necessário que haja recuos de 15 m na frente, 5 m atrás e 5 m em cada lado. Encontre as dimensões do lote de área mínima na qual possa ser construído o galpão. Justifique a sua resposta.

Resolução: Denotamos as laterais do galpão retangular por a e b.
Assim, área do galpão será de $a \cdot b = 800$.
Portanto $b = \dfrac{800}{a}$.
A área do lote precisa ter $A = (a + 15 + 5) \cdot (b + 5 + 5)$.
Desta forma, temos

$$\begin{aligned} A(a) &= (a+20) \cdot \left(\frac{800}{a} + 10\right) \\ &= 800 + 20\frac{800}{a} + 10a + 200 \\ &= 10a + 1000 + \frac{16000}{a}\ . \end{aligned}$$

O intervalo para o comprimento da lateral a é $\mathbb{D} = (0, \infty)$. (1.0)
Para encontrar os pontos críticos desta função no intervalo $\mathbb{D}$ temos que derivá-la. Obtemos $A'(a) = 10 - \dfrac{16000}{a^2}$.
Os pontos críticos desta derivada são:
$A'(a)\nexists$ em $a = 0 \notin \mathbb{D}$
e $A'(a) = 0$, ou seja $10 - \dfrac{16000}{a^2} = 0$, que acontece em $a^2 = 1600$, i.e., $a = \pm 40$, dos quais somente $a = 40$ se encontra no intervalo $\mathbb{D}$.
Para verificar se $a = 40$ representa o mínimo procurado, temos que comparar o valor da área neste ponto com os valores nas pontas do intervalo.
Para $a = 40$, temos a área $A(40) = 10 \cdot 40 + 1000 + \dfrac{16000}{40} = 400 + 1000 + 400 = 1800$.
Nas pontas do intervalo, temos que considerar os limites:

$$\lim_{a\to 0^+} A(a) = \lim_{a\to 0^+} \underbrace{10a}_{\searrow 0} + 1000 + \underbrace{\frac{1600}{a}}_{\searrow \infty} = \infty$$

e $\displaystyle\lim_{a\to\infty} A(a) = \lim_{a\to\infty} \underbrace{10a}_{\searrow \infty} + 1000 + \underbrace{\frac{1600}{a}}_{\searrow 0} = \infty.$

Como o valor $A(40)$ é menor do que estes dois limites, o ponto $a = 40$ representa o mínimo absoluto em $\mathbb{D}$.
Concluímos que o galpão ótimo tem laterais $a = 40$ m e $b = \dfrac{800}{40} = 20$ m e o menor lote que acomoda este galpão é um retângulo com laterais $l_1 = a + 20 = 60$ m e $l_2 = b + 10 = 30$ m e área de $A = 1800$ m^2. (1.0)

Q5. (2.0) Considere a seguinte função

$$f(x) = 2xe^{-x+4}.$$

(a) Determine os intervalos de crescimento, decrescimento e máximos e mínimos locais da função;
(b) Caso existam, determine as assíntotas horizontais e verticais de f;
(c) Determine os intervalos onde f tem concavidade para cima e para baixo e os pontos de inflexão.

Resolução:

(a) Intervalos de crescimento e decrescimento.

$$f'(x) = 2e^{-x+4} - 2xe^{-x+4} = 2(1-x)e^{-x+4}. \text{ (0.3)}$$

Pontos críticos: A derivada existe em todo $\mathbb{R}$. A derivada é zero em $2(1-x)e^{-x+4} = 0$, i.e., em $x = 1$. Como o fator $2e^{-x+4}$ sempre é positivo, concluímos que $f'(x) > 0\ \forall x < 1$, i.e., $f(x)$ é crescente em $(-\infty, 1)$ e $f'(x) < 0\ \forall x > 1$, i.e., $f(x)$ é decrescente em $(1, \infty)$. Uma vez que $f'(x) > 0$ para $x < 1$ e $f'(x) < 0$ para $x > 1$, f possui um máximo relativo em $x = 1$. (0.3)

(b) Assíntotas: horizontais: $L = \lim_{x\to+\infty} 2xe^{-x+4} = [0 \cdot \infty]$ — forma indeterminada
$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{x-4}} = [\frac{\infty}{\infty}]$ — forma indeterminada
L'Hôpital: $L = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^{x-4}} = 0$
Portanto, a reta $y = 0$ é assíntota horizontal de f quando $x \to +\infty$. (0.5)
$\lim_{x\to-\infty} 2xe^{-x+4} = -\infty$. Portanto, f não tem assíntota horizontal quando x tende a menos infinito. (0.2)
Verticais: Como a função não tem nenhuma descontinuidade, não possui assíntotas verticais. (0.1)

(c) Concavidade e pontos de inflexão:

$$f''(x) = 2(-1)e^{-2x+2} + 2(1-x)(-1)e^{-x+4} = 2(x-2)e^{-x+4}. \text{ (0.3)}$$

Pontos críticos da derivada: f'' existe em todo $\mathbb{R}$. $f'' = 0$ em $x = 2$. Como o fator $2e^{-x+4}$ sempre é positivo, concluímos que $f''(x) < 0\ \forall x < 2$, i.e., $f'(x)$ é côncava para baixo em $(-\infty, 2)$ e $f''(x) > 0\ \forall x > 2$, i.e., $f(x)$ é côncava para cima em $(2, \infty)$. Portanto, f tem um ponto de inflexão em $x = 2$. (0.3)