Q1. (2,0) Calcule a derivada das seguintes funções

(a) $l(x) = x^3 \operatorname{sen}(x) + \dfrac{e^{2x}}{x^2}$

(b) $p(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

Resolução:

(a)

Pela regra da soma $\dfrac{dl(x)}{dx} = \dfrac{d}{dx}\big(x^3 \operatorname{sen}(x)\big) + \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^{2x}}{x^2}\right)$. (0.2)

Pela regra do produto das derivadas, temos:

$\dfrac{d}{dx}\big(x^3 \operatorname{sen}(x)\big) = (x^3)' \operatorname{sen}(x) + x^3(\operatorname{sen}(x))' = 3x^2 \operatorname{sen}(x) + x^3 \cos(x)$. (0.4)

Pela regra do quociente temos:

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{e^{2x}}{x^2}\right) = \dfrac{(e^{2x})'x^2 - e^{2x}(x^2)'}{(x^2)^2} = \dfrac{2e^{2x}x^2 - 2xe^{2x}}{x^4} = \dfrac{2e^{2x}(x-1)}{x^3}$ (0.4)

Assim,

$\dfrac{d}{dx} = 3x^2 \operatorname{sen}(x) + x^3 \cos(x) + \dfrac{2e^{2x}(x-1)}{x^3}$

(b)

Aplicando a regra da cadeia:

$\dfrac{dp(x)}{dx} = \dfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)^{-1/2} \dfrac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)$ (0.4)

$\dfrac{dp(x)}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\left[1 + \dfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{x}\right)^{-1/2} \dfrac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x}\right)\right]$ (0.4)

$\dfrac{dp(x)}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\left[1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\left(1 + \dfrac{1}{2}x^{-1/2}\right)\right] = \dfrac{\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} + 1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$. (0.2)

Q2. (2.0) Calcule

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x+3}$

Resolução:

(a)

Note que temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Vamos aplicar L'Hospital.

$$\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to\pi} \frac{(1+\cos x)'}{(\operatorname{sen}^2 x)'} = \lim_{x\to\pi} \frac{-\operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x\cos x} = \lim_{x\to\pi} \frac{-1}{2\cos x} = \frac{1}{2}. \quad (1.0)$$

(b)

Observe que,

$$\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x+3} = e^{(2x+3)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}. \quad (0.2)$$

Temos,

$$\lim_{x\to+\infty} \left[(2x+3)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{(2x+3)}}.$$

Note que temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Vamos aplicar L'Hospital.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{(2x+3)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]'}{\left[\frac{1}{(2x+3)}\right]'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(-\frac{3}{x^2+3x}\right)}{\frac{-2}{(2x+3)^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3(2x+3)^2}{-2(x^2+3x)}. \quad (0.4)$$

Podemos calcular diretamente ou usar L'Hôpital já temos uma indeterminação, agora do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Vamos aplicar L'Hospital.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3(2x+3)^2}{-2(x^2+3x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{[-3(2x+3)^2]'}{[-2(x^2+3x)]'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-12(2x+3)}{-2(2x+3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-12}{-2} = 6. \quad (0.2)$$

Então, como a exponencial é contínua,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x+3} = \lim_{x\to+\infty} e^{(2x+3)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2x+3)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]} = e^6. \quad (0.2)$$

Q3. (2.0) Ache as equações das retas que passam pelo ponto $(3, -2)$ e que sejam tangentes à parábola $y = x^2 - 7$.

Resolução:

As retas devem ser tangentes a algum ponto da parábola $y = x^2 - 7$. Digamos que sejam tangentes a um ponto $(p, f(p))$.

Então temos a equação da reta r é dada por $y - f(p) = f'(p)(x - p)$ com
$f(p) = p^2 - 7$
$f'(p) = 2p$.

Logo, a reta tangente é
$y - p^2 + 7 = 2p(x - p)$. (1.0)

Temos que descobrir quanto vale p. Como r passa por $(3, -2)$, temos que $x = 3 \Rightarrow y = -2$.
Então, $-2 - p^2 + 7 = 2p(3 - p)$, de onde segue que $p = 5$ ou $p = 1$.
Assim r será dada por $y - f(5) = f'(5)(x - 5)$ ou $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$.
Com $f(5) = 18$ e $f'(5) = 10$ temos $y = 10x - 32$.
Com $f(1) = -6$ e $f'(1) = 2$ temos $y = 2x - 8$.

Assim as duas retas tangentes à parábola $y = x^2 - 7$ que passam pelo ponto $(3, -2)$ são dadas pelas equações $y = 10x - 32$ e $y = 2x - 8$.

(1.0)

Q4. (2.0) Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(3, 5)$ e que delimita a menor área do primeiro quadrante. Justifique a sua resposta.

Resolução: Considere uma reta $y = ax + b$. O lado horizontal do triângulo é $-b/a$ e altura é b.

Como o triângulo é retângulo, a área de um triângulo $A = -b^2/2a$.

Como a reta passa por $(3, 5)$, logo: $5 = a3 + b$, ou seja, $b = 5 - 3a$. Substituindo, temos um função área

$$A(a) = -\frac{(5-3a)^2}{2a}, \quad a < 0$$

que é a função a ser minimizada. (1.0)

Para isso, vamos tomar a derivada de $A(a)$ em relação à a:

$$A'(a) = \frac{(25 - 9a^2)}{2a^2}.$$

Como $a \neq 0$, a expreção de $A'(a)$ terá um ponto crítico quando $(9a^2 - 25) = 0$, de onde temos que $a = \pm\dfrac{5}{3}$. Como a reta que delimita alguma área no primeiro quadrante tem coeficiente angular negativo, segue que $a = -\dfrac{5}{3}$.

Como $A'(a) < 0$ se $a < -\frac{5}{3}$ e $A'(a) > 0$ se $-\frac{5}{3} < a < 0$, concluímos que $a = -\frac{5}{3}$ é ponto de mínimo.

Como $b = 5 - 3a$, segue que para $a = -\dfrac{5}{3}$, temos $b = 10$.

Assim, a equação da reta que passa pelo ponto $(3, 5)$ e que delimita a menor área do primeiro quadrante é dada por

$$y = -\frac{5}{3}x + 10. \text{ (1.0)}$$

Q5. (2.0) Seja $g(x) = x|x|$.
(a) Mostre que a função $g(x)$ tem um ponto de inflexão em $x = 0$,
(b) Mostre usando a definição que $g''(0)$ não existe.

Resolução:

(a)

Note que

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow g''(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases} \quad (0.8)$$

Assim, para $x < 0$, temos $g''(x) < 0$, ou seja, $g(x)$ tem concavidade negativa. Se $x > 0$, temos $g''(x) > 0$, ou seja, $g(x)$ tem concavidade positiva. Logo, existe uma mudança de concavidade em $x = 0$, em outras palavras, um ponto de inflexão. (0.2)

Alternativa para calcular g'': Para $x \neq 0$, temos
$\dfrac{d}{dx}g(x) = \dfrac{d}{dx}(x)|x| + x\dfrac{d}{dx}(|x|) = 1|x| + \dfrac{x}{|x|} = 2|x|$.
Ainda para $x \neq 0$,
$g''(x) = \dfrac{d}{dx}2|x| = 2\dfrac{d}{dx}(|x|) = \dfrac{2x}{|x|}$.

(b)

Por definição:

$$g''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{x},$$

pois

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \to 0} |x| = 0.$$

Temos

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g'(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{x} = 2 \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{g'(x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-2x}{x} = -2.$$

Portanto, não existe $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{g'(x)}{x}$, logo $g''(0)$ não existe. (1.0)

Alternativa: Seja $f(x) = |x|$.
$\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{|x|}{x}$ que é igual a 1 se $x > 0$ ou -1 se $x < 0$. Assim,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$$

Logo, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ não existe e portanto, f não é derivável em $x = 0$. Como a derivada de $|x|$ não existe em $x = 0$, segue que $g''(0)$ também não. (1.0)