Q1. (2,5) Calcule as seguintes integrais

(a) (0.5) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen}(x^3)\, dx$

(b) (1.0) $\displaystyle\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\, dx$

(c) (1.0) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+x}\, dx$

Solução: (a) Fazendo $u = x^3$ temos $du = 3x^2dx$. Logo,

$$\int x^2 \operatorname{sen}(x^3)\, dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}(u)du = -\frac{1}{3}\cos(u) + C = -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C. \ (0.5)$$

(b) Para eliminar o radical, façamos $w = \sqrt{x}$. Assim, $w^2 = x$ e $dx = 2wdw$, o que implica em

$$\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\, dx = 2\int w^2e^w dw. \ (0.2)$$

Para resolver a integral do lado direito usamos integração por partes fazendo $u = w^2$ e $dv = e^w dw$ de modo que $du = 2wdw$ e $v = e^w$. Portanto,

$$\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\, dx = 2\int udv = 2uv - 2\int vdu = 2w^2e^w - 4\int we^w dw. \ (0.3)$$

Agora, para resolver esta última integral, novamente usamos integração por partes com $u = w$ e $dv = e^w dw$. Daí,

$$\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\, dx = 2w^2e^w - 4\int udv = 2w^2e^w - 4\left(we^w - \int e^w dw\right) = 2w^2e^w - 4we^w + 4e^w + C. \ (0.3)$$

Lembrando que $w = \sqrt{x}$, finalmente obtemos

$$\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\, dx = 2xe^{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + 4e^{\sqrt{x}} + C. \ (0.2)$$

(c) Usando frações parciais escrevemos

$$\frac{x+4}{x^2+1} = \frac{x+4}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}. \ (0.4)$$

Daqui segue que $x + 4 = A(x + 1) + Bx$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Substituindo $x = 0$ e $x = -1$ nesta identidade obtemos, respectivamente, $A = 4$ e $B = -3$ $\quad (0.3)$. Daí,

$$\int \frac{x+4}{x^2+x}\, dx = \int \left(\frac{4}{x} - \frac{3}{x+1}\right) dx = 4\ln|x| - 3\ln|x+1| + C. \ (0.3)$$

Esquecer a constante C: -(0.1)

Q2. (1.5) Calcule a derivada da função

$$f(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} \cos(t) e^{t^2} dt.$$

Solução: Primeiramente observemos o integrando é uma função contínua e que

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\operatorname{sen} x}^{0} \cos(t) e^{t^2} dt + \int_{0}^{\cos x} \cos(t) e^{t^2} dt = -\int_{0}^{\operatorname{sen} x} \cos(t) e^{t^2} dt + \int_{0}^{\cos x} \cos(t) e^{t^2} dt \\ &= -f_1(x) + f_2(x). \ (0.5) \end{aligned}$$

Agora notemos que

$$f_1(x) = g(\operatorname{sen} x) \qquad \text{e} \qquad f_2(x) = g(\cos x),$$

onde

$$g(x) = \int_0^x \cos(t) e^{t^2} dt.$$

Lembremos que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo (Parte 1), $g'(x) = \cos(x) e^{x^2}$ (0.5). Portanto, pela regra da cadeia

$$f_1'(x) = g'(\operatorname{sen} x) \cos x = \cos(\operatorname{sen} x) e^{\operatorname{sen}^2 x} \cos x$$

e

$$f_2'(x) = g'(\cos x)(-\operatorname{sen} x) = -\cos(\cos x) e^{\cos^2 x} \operatorname{sen} x.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -f_1'(x) + f_2'(x) \\ &= -\cos(\operatorname{sen} x) e^{\operatorname{sen}^2 x} \cos x - \cos(\cos x) e^{\cos^2 x} \operatorname{sen} x. \ (0.5) \end{aligned}$$

Q3. (2.0) Determine a área da região limitada exatamente pelas três curvas

$$y = x^2, \quad y = 2 - x^2 \quad \text{e} \quad y = 2x + 8.$$

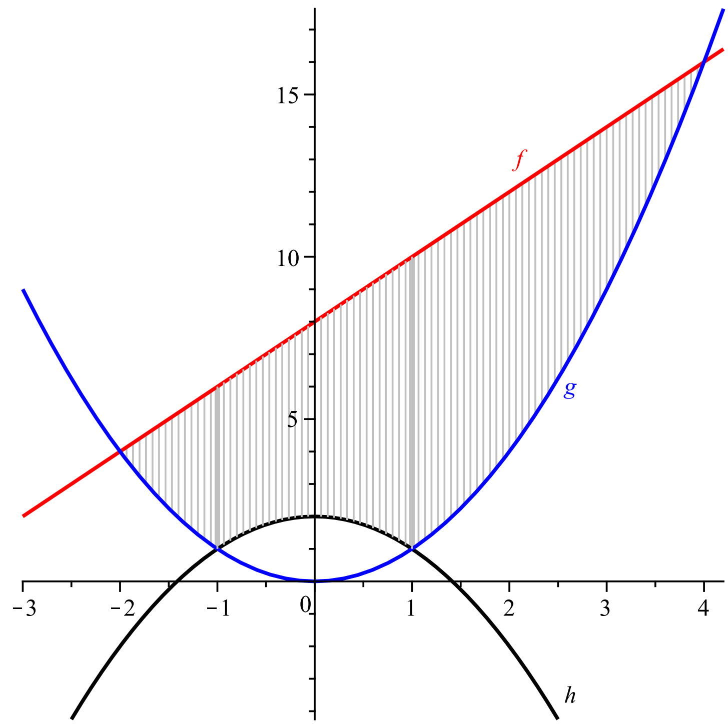

Figura 1: Esboço da região delimitada pelas curvas dadas

Solução: Inicialmente observe que os gráficos das funções $g(x) = x^2$ e $h(x) = 2 - x^2$ se interceptam se, e somente, $x^2 = 2 - x^2$, ou seja, se, e somente se, $x = \pm 1$. Também, os gráficos das funções $g(x) = x^2$ e $f(x) = 2x + 8$ se interceptam se, e somente se, $x^2 = 2x + 8$, ou seja, se e somente se $x = -2$ ou $x = 4$. Um esboço da região entre tais curvas é dada acima (note que as curvas $y = 2x + 8$ e $y = 2 - x^2$ não se interceptam). (0.5)

Portanto, denotando por A a área da região, temos

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{-1} (2x + 8 - x^2)dx + \int_{-1}^{1} (2x + 8 - (2 - x^2))dx + \int_{1}^{4} (2x + 8 - x^2)dx \quad (0.8) \\
&= \int_{-2}^{-1} (2x + 8 - x^2)dx + \int_{-1}^{1} (2x + 6 + x^2)dx + \int_{1}^{4} (2x + 8 - x^2)dx \\
&= \left(x^2 + 8x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^{-1} + \left(x^2 + 6x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{1} + \left(x^2 + 8x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{1}^{4} \\
&= \frac{8}{3} + \frac{38}{3} + 18 \\
&= \frac{100}{3} \quad (0.7)
\end{aligned}$$

Alternativamente,

$$A = \int_{2}^{4} (2x + 8 - x^2)dx - \int_{-1}^{1} (2 - x^2 - x^2)dx = \left(x^2 + 8x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^{4} - \left(2x - 2\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{1}$$

$$= 60 - \frac{64}{3} - \frac{16}{3} = \frac{100}{3}$$

Q4. (2.0) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região delimitada pela curva $y = x^2 - x + 3$ e a reta $y = 3$.

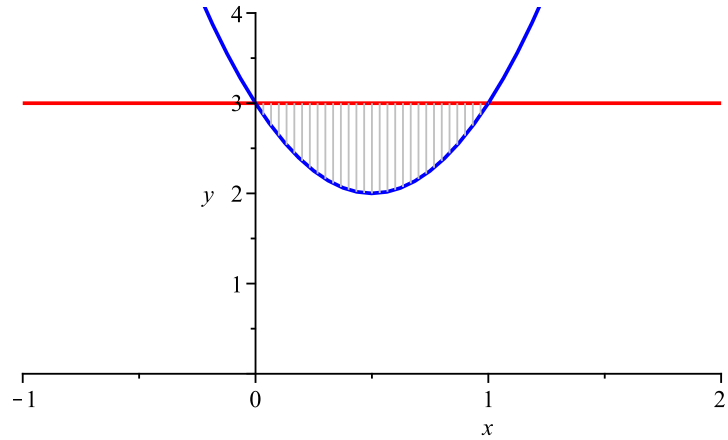

Figura 2: Esboço da região delimitada pelas curvas dadas

Solução: A interseção de um plano perpendicular ao eixo x passando pelo sólido nos dá um anel de raio externo $r_e = 3$ e raio interno $r_i = x^2 - x + 3$, (0.5) de forma que a área da seção transversal é

$$A(x) = 9\pi - \pi(x^2 - x + 3)^2 = -\pi(x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x). \text{ (0.5)}$$

Portanto, o volume do sólido é

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)dx = -\pi \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x)dx \\ &= -\pi \left(\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^4}{4} + 7\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{29}{30}\pi \text{ (1.0)} \end{aligned}$$

Q5. (2.0) Discuta a convergência ou divergência da integral imprópria

$$\int_0^e x^2 \ln(x)\, dx.$$

Solução: Observe que a função $f(x) = x^2 \ln(x)$ é contínua em $(0, e]$ e descontínua em $x = 0$ (pois não está definida em $x = 0$). Logo,

$$\int_0^e x^2 \ln(x)\, dx = \lim_{t \to 0^-} \int_t^e x^2 \ln(x)\, dx. \ (0.2)$$

Vamos agora usar integração por partes com $u = \ln(x)$ e $dv = x^2 dx$. Assim, $du = \frac{1}{x}dx$, $v = \frac{1}{3}x^3$ e

$$\int x^2 \ln(x) dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + C. \ (0.5)$$

Para integral definida,

$$\int_t^e x^2 \ln(x)\, dx = \left(\frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{9}x^3\right)\Big|_1^e = \frac{2}{9}e^3 - \left(\frac{t^3}{3}\ln(t) - \frac{1}{9}t^3\right). \ (0.5)$$

Finalmente, pela regra de L'Hospital,

$$\begin{aligned}
\int_0^e x^2 \ln(x)\, dx &= \frac{2}{9}e^3 - \lim_{t \to 0^-}\left(\frac{t^3}{3}\ln(t) - \frac{1}{9}t^3\right) \\
&= \frac{2}{9}e^3 - \lim_{t \to 0^-}\left(\frac{\ln(t)}{\frac{1}{t^3}}\right) \\
&= \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{3}\lim_{t \to 0^-}\frac{t^3}{3} \\
&= \frac{2}{9}e^3 \ (0.8)
\end{aligned}$$