Q1. (2.5) Calcule as seguintes integrais

(a) (0.5) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(x)\sqrt{\cos(x)}dx$

(b) (1.0) $\displaystyle\int \frac{3x}{(x+2)(x-1)^2}dx$

(c) (1.0) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

Solução: (a) Substituição: $u = \cos(x) \Rightarrow du = -\operatorname{sen}(x)dx$. Logo

$$\int \operatorname{sen}(x)\sqrt{\cos(x)}dx = -\int \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C = -\frac{2}{3}\cos^{3/2}(x) + C. \ (0.5)$$

(b) Por frações parciais

$$\frac{3x}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \ (0.4)$$

Multiplicando ambos os lados por $(x+2)(x-1)^2$, obtemos

$$\begin{aligned} 3x &= A(x-1)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x+2) = A(x^2-2x+1) + B(x^2+x-2) + C(x+2) \\ &= (A+B)x^2 + (-2A+B+C)x + (A-2B+2C) \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes: (i) $A + B = 0 \Rightarrow A = -B$, (ii) $-2A + B + C = 3 \Rightarrow 3B + C = 3$ e (iii) $A - 2B + 2C = 0 \Rightarrow -3B + 2C = 0 \Rightarrow 3B = 2C$. Por (ii) e (iii), $2C + C = 3 \Rightarrow C = 1$, e portanto $B = 2/3$ e $A = -2/3$. (0.3)

Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{(x+2)(x-1)^2}dx &= \int \left(\frac{-2/3}{x+2} + \frac{2/3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx \\ &= -\frac{2}{3}\ln|x+2| + \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C. \ (0.3) \end{aligned}$$

(c). Substituição trigonométrica: $x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $(u = \operatorname{arcsen}(2x)) \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\cos u du$ e

$$\sqrt{1-4x^2} = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u} = \sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u \text{ pois } \cos u > 0 \text{ para } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \ (0.5)$$

Assim

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{\cos u}{2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}}du = \frac{1}{2}\int \frac{\cos u}{\cos u}du = \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(2x) + C. \ (0.5)$$

Esquecer a constante C: -(0.1)

Q2. (1.5) Considere a função $f(x)$ definida por

$$f(x) = \int_x^{3x+1} e^{t^2}\, dt.$$

Calcule a derivada de $f(x)$.

Solução: Definindo a função

$$g(x) = \int_a^x e^{t^2}\, dt,$$

temos que $f(x) = g(3x+1) - g(x)$. (0.5)

Portanto, pela regra da cadeia, temos

$$f'(x) = g'(3x+1) \cdot 3 - g'(x)$$

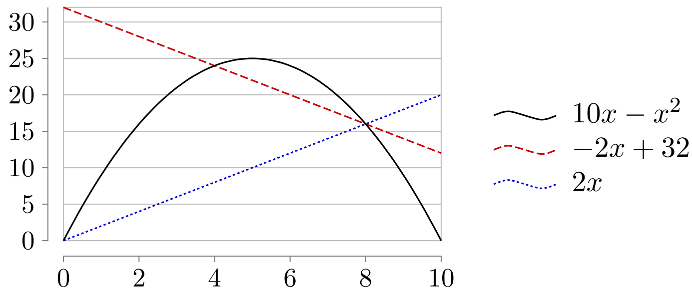
onde pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $g'(x) = e^{x^2}$. (0.5)

Portanto $f'(x) = 3e^{(3x+1)^2} - e^{x^2}$. (0.5)

Q3. (2.0) Determine a área da região delimitada exatamente pelas três curvas

$$y = 10x - x^2, \quad y = -2x + 32 \quad \text{e} \quad y = 2x.$$

Solução.



Primeiro observe que as três curvas se cruzam no ponto $(8, 16)$. Além disso

- Os gráficos de $y = 10x - x^2$ e $y = -2x + 32$ se cruzam no ponto $(4, 24)$, e
- Os gráficos de $y = 10x - x^2$ e $y = 2x$ se cruzam no ponto $(0, 0)$. (0.3)

Além disso, temos que $2x \leq 10x - x^2$ no intervalo $[0, 4]$ e $2x \leq -2x + 32$ no intervalo $[4, 8]$. Portanto, área da região limitada pelas curvas é dado pela soma das duas integrais a seguir

$$A \overset{(1.0)}{=} \int_0^4 (10x - x^2 - 2x)dx + \int_4^8 (-2x + 32 - 2x)dx = \int_0^4 (8x - x^2)dx + \int_4^8 (-4x + 32)dx$$
$$= (4x^2 - x^3/3)\big|_0^4 + (-2x^2 + 32x)\big|_4^8 = (64 - 64/3) + (-128 + 256 + 32 - 128)$$
$$= 128/3 + 32 = 224/3. \text{ (0.7)}$$

Alternativa:

$$A \overset{(1.0)}{=} \int_0^8 (10x - x^2 - 2x)dx - \int_4^8 (10x - x^2 - (-2x + 32))dx$$

$$= \int_0^8 (8x - x^2)dx - \int_4^8 (12x - x^2 - 32)dx = \left(4x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^8 - \left(6x^2 - \frac{x^3}{3} - 32x\right)\Big|_4^8$$

$$= \frac{256}{3} - \frac{32}{3} = \frac{224}{3}. \text{ (0.7)}$$

Q4. (2.0) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região limitada pelas curvas $y = \sqrt{\operatorname{sen}^3(x)}$, $y = 0$ e $x = \pi/2$.

Solução. O volume do sólido S é

$$V \overset{(0.5)}{=} \int_0^{\pi/2} \pi f(x)^2 dx = \int_0^{\pi/2} \pi \operatorname{sen}^3(x) dx \overset{(0.5)}{=} \int_0^{\pi/2} \pi \operatorname{sen} x(1 - \cos^2 x) dx$$

Nós substituímos $u = \cos x \Rightarrow du = -\operatorname{sen} x dx$. Quando $x = \pi/2$, $u = 0$ e quando $x = 0$, $u = 1$. Então

$$V \overset{(0.5)}{=} \pi \int_1^0 (1 - u^2)(-du) = \pi \int_0^1 (1 - u^2) du = \pi(u - u^3/3)\big|_0^1 \overset{(0.5)}{=} \frac{2}{3}\pi.$$

Q5. (2.0) (a)Calcule a seguinte integral indefinida

$$\int x \ln x dx$$

(b)Verifique se a integral imprópria abaixo converge ou diverge. No caso de convergir, calcule o valor da integral.

$$\int_0^1 x \ln x dx$$

Solução. (a) Por integração por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Nós escolhemos $u = \ln x \Rightarrow du = dx/x$ e $dv = xdx \Rightarrow v = x^2/2$. (0.5) Então

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C. \; (0.5)$$

(b) Como o integrando tem uma descontinuidade em $x = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \ln x dx &\overset{(0.2)}{=} \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 x \ln x dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right) \Bigg|_\epsilon^1 \\
&\overset{(0.3)}{=} \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(-\frac{1}{4} - \underbrace{\frac{\epsilon^2}{2} \ln \epsilon}_{\to 0.\infty} + \frac{\epsilon^2}{4} \right) = -\frac{1}{4} - \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\ln \epsilon}{2/\epsilon^2} \\
&\overset{L.H.}{=} -\frac{1}{4} - \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1/\epsilon}{-4/\epsilon^3} = -\frac{1}{4} - \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\epsilon^2}{-4} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

onde usamos a regra de L'Hopital. Portanto, a integral imprópria converge para $-\frac{1}{4}$. (0.5)