Q1. (2,5) Calcule as seguintes integrais

(a) (1.0) $\displaystyle\int x\cos^2 x\,dx$

(b) (1.5) $\displaystyle\int \frac{5x^2+6x+15}{x(x^2+2x+5)}\,dx$

Solução: (a) Teorema de adição: $\cos^2 x = [1+\cos(2x)]/2$. (0.2)

$$\begin{aligned}\int x\cos^2 x\,dx &= \int x\,\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int(x+x\cos 2x)\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int x\,dx+\frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx = \frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx.\end{aligned}$$

Na segunda integral, integramos por partes:
$f(x)=x$ e $g'(x)=\cos 2x \Rightarrow f'(x)=1$ e $g(x)=\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx &= \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{2}\operatorname{sen} 2x-\int\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\,dx\Big)\\ &= \frac{x}{4}\operatorname{sen} 2x-\frac{1}{4}\int\operatorname{sen} 2x\,dx = \frac{x}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C.\ (0.6)\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int x\cos^2 x\,dx = \frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C.\ (0.2)$$

(b) O denominador é fatorável em x e $x^2+2x+5=(x+1)^2+4=4[1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2]$.
Integração por frações parciais:

$$\frac{5x^2+6x+15}{x(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5} = \frac{A(x^2+2x+5)+Bx^2+Cx}{x(x^2+2x+5)}.\ (0.5)$$

Assim, $5x^2+6x+15=(A+B)x^2+(2A+C)x+5A$, que implica as relações
$15=5A\Rightarrow A=3,\quad 6=2A+C\Rightarrow C=0$ e $\quad 5=A+B\Rightarrow B=2.$ (0.2)
A integral vira

$$\begin{aligned}I=\int\frac{5x^2+6x+15}{x(x^2+2x+5)}\,dx &= \int\left(\frac{3}{x}+\frac{2x}{x^2+2x+5}\right)dx\\ &= 3\ln|x|+\int\left(\frac{2x+2}{x^2+2x+5}-\frac{2}{x^2+2x+5}\right)dx\\ &= 3\ln|x|+\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx-\int\frac{1}{2}\frac{1}{[1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2]}\,dx\ .\end{aligned}$$

Fazendo $z=x^2+2x+5\Rightarrow dz=(2x+2)dx$ e $u=\dfrac{x+1}{2}\Rightarrow du=\dfrac{1}{2}dx$, obtemos

$$\begin{aligned}I &= 3\ln|x|+\int\frac{1}{z}dz-\int\frac{1}{1+u^2}\,du\\ &= 3\ln|x|+\ln(z)-\arctan u+C\\ &= 3\ln|x|+\ln(x^2+2x+5)-\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C\ .\ (0.2)+(0.3)+(0.3)\end{aligned}$$

Esquecer a constante C: -(0.1)

Q2. (1.5) Se $f(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt{1+t^2}\, dt$ e $g(y) = \int_3^y f(x)\, dx$, calcule $g''(y)$.

Solução: Pelo Teorema Fundamental do Cálculo $g'(y) = f(y)$ (0.5). Derivando mais uma vez, $g''(y) = f'(y)$.

Seja $u = \operatorname{sen} x$ então

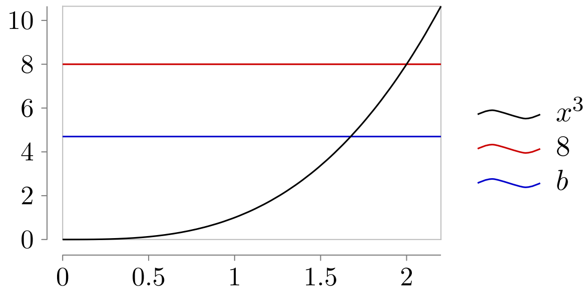
$$f(u) = \int_0^u \sqrt{1+t^2}\, dt$$

e pelo Teorema Fundamental do Cálculo $f'(u) = \sqrt{1+u^2}$. (0.5).

Agora pela regra da cadeia,

$$g''(y) = f'(u(y))u'(y) = \sqrt{1+\operatorname{sen}^2 y}\cos y. \text{ (0.5)}$$

Q3. (2.0) Encontre o número b tal que a reta horizontal $y = b$ divida a região limitada pela curva $y = x^3$ e as retas $x = 0$ e $y = 8$ em duas regiões de áreas iguais.



Solução:

A reta $y = 8$ corta a função $y = x^3$ em $x^3 = 8$, ou seja, $x = \sqrt[3]{4} = 2$.
A área da região é dada por:

$$\begin{aligned} A(8) &= \int_0^2 (8 - x^3)\, dx = \left(8x - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = \left(8 \cdot 2 - \frac{2^4}{4}\right) - 0 \\ &= 16 - 4 = 12\ .\ (0.7) \end{aligned}$$

Correspondentemente, a área entre $y = x^3$ e $y = b$ é

$$\begin{aligned} A(b) &= \int_0^{\sqrt[3]{b}} (b - x^3)\, dx = \left(bx - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt[3]{b}} \\ &= \left(b\sqrt[3]{b} - \frac{b^{4/3}}{4}\right) - 0 = (1 - 1/4) \cdot b^{4/3} = \frac{3}{4} b^{4/3}\ .\ (0.7) \end{aligned}$$

Portanto, o valor b desejado é aquele que faz

$$\frac{3}{4} b^{4/3} = \frac{A(8)}{2} = \frac{1}{2} 12 = 6.$$

Obtemos $b^{4/3} = \dfrac{4}{3} \cdot 6 = 8$, ou seja, $b = 8^{3/4}$. (0.6)

Q4. (2.0) Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y^2 = x$ em torno do eixo y.

Solução: Integração por minidiscos:

As curvas $y = x^2$ e $y^2 = x$ se cortam em (0,0) e (1,1). Portanto, o volume do sólido de revolução é obtido pela diferença dos volumes dos sólidos de rotação de cada uma destas curvas, integrado ao longo do eixo y no intervalo de (0,1).

Para $x = y^2$, temos $V_1 = \int_0^1 \pi(y^2)^2 dy = \pi \int_0^1 y^4 dy = \pi \left.\frac{y^5}{5}\right|_0^1 = \frac{\pi}{5}$. (0.8)

Para $y = x^2$, temos dois ramos, $y = \pm\sqrt{x}$, dos quais o positivo limita o volume desejado. Assim, obtemos $V_2 = \int_0^1 \pi(\sqrt{y})^2 dy = \pi \int_0^1 y dy = \pi \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = \frac{\pi}{2}$. (0.8)

Como no intervalo (0,1), as funções satisfazem $\sqrt{y} > y^2$, o volume procurado é

$$V = V_2 - V_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{5\pi - 2\pi}{10} = \frac{3}{10}\pi. \quad (0.4)$$

Solução: Integração por cascas cilíndricas:

As curvas $y = x^2$ e $y^2 = x$ se cortam em (0,0) e (1,1). Integrando por cascas cilíndricas em volta do eixo y, o volume é delimitado pelo ramo positivo de $y = \pm\sqrt{x}$. No intervalo (0,1), temos $\sqrt{x} > x^2$. Portanto,

$$V = \int_0^1 2\pi x|\sqrt{x} - x^2|\,dx = \int_0^1 2\pi x(\sqrt{x} - x^2)\,dx \quad (0.8) + (0.4)$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^{3/2} - x^3)\,dx = 2\pi \left(\frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 2\pi\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4} - 0\right) = 2\pi\left(\frac{8-5}{20}\right) = \frac{3}{10}\pi \quad (0.8)$$

.

Q5. (2.0) Discuta a convergência ou divergência da integral imprópria

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\, dx.$$

Solução: $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^3 e^{-x^2}\, dx.$ (0.2)

Substituição: $u = -x^2 \Rightarrow du = -2x dx \Rightarrow dx = -\dfrac{du}{2x}$, com limites de integração: $u(0) = -0^2 = 0$ e $u(b) = -b^2$. Assim,

$$I = \lim_{b\to\infty}\left(-\int_0^{-b^2} x^3 e^u \frac{du}{2x}\right) = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_{-b^2}^0 x^2 e^u\, du = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_{-b^2}^0 u e^u\, du\ . \quad (0.5)$$

Integração por partes: $f(u) = u$ e $g'(u) = e^u \Rightarrow f'(u) = 1$ e $g(u) = e^u$. Obtemos

$$\begin{aligned}
I &\overset{(0.5)}{=} -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[ue^u\Big|_{-b^2}^0 - \int_{-b^2}^0 e^u\, du\right] = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[0e^0 - \left(-b^2 e^{-b^2}\right) - e^u\Big|_{-b^2}^0\right] \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[b^2 e^{-b^2} - \left(e^0 - e^{-b^2}\right)\right] = -\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[b^2 e^{-b^2} - \underbrace{1}_{\to 1} + \underbrace{e^{-b^2}}_{\to 0}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \lim_{b\to\infty}\underbrace{b^2 e^{-b^2}}_{\to\infty\cdot 0}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \lim_{b\to\infty}\frac{b^2}{e^{b^2}}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \lim_{b\to\infty}\frac{2b}{e^{b^2}2b}\right) \quad (0.5) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \lim_{b\to\infty}\underbrace{e^{-b^2}}_{\to 0}\right) = \frac{1}{2}\ . \quad (0.3)
\end{aligned}$$