Q1. (2.5) Calcule as seguintes integrais

(a) (0.5) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$

(b) (1.0) $\displaystyle\int x^2 e^{-x}\,dx$

(c) (1.0) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-7x+12}\,dx$

Solução: (a) Fazendo $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$. Logo,

$$\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(\ln x)^4}{4} + C. \ (0.5)$$

(b) Por integração por partes: $f(x) = x^2,\ g'(x) = e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 2x,\ g(x) = -e^{-x}$. Logo,

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = -x^2 e^{-x} + \int 2xe^{-x}dx. \ (0.5)$$

Integrando por partes novamente: $f(x) = x,\ g'(x) = e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 1,\ g(x) = -e^{-x}$. Logo,

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x}dx = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C. \ (0.5)$$

(c) Como $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$, (0.2) usamos frações parciais:

$$\frac{2x+1}{x^2-7x+12} = \frac{2x+1}{(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4)+B(x-3)}{(x-3)(x-4)}. \ (0.3)$$

Assim: $2x+1 = A(x-4) + B(x-3)$. Para $x = 3$ obtemos $7 = -A \Rightarrow A = -7$ e para $x = 4$ temos $9 = B$. (0.2) Portanto,

$$\int \frac{2x+1}{x^2-7x+12}\,dx = \int \Big(-\frac{7}{x-3} + \frac{9}{x-4}\Big)dx = -7\ln|x-3| + 9\ln|x-4| + C. \ (0.3)$$

Esquecer a constante C: -(0.1)

Q2. (1.5) Determine $f'(2)$ se $f(x) = e^{g(x)}$ e $g(x) = \int_2^x \frac{t}{1+t^4} dt$.

Solução: Pela Regra da Cadeia, $f'(x) = e^{g(x)} g'(x)$. (0.5)

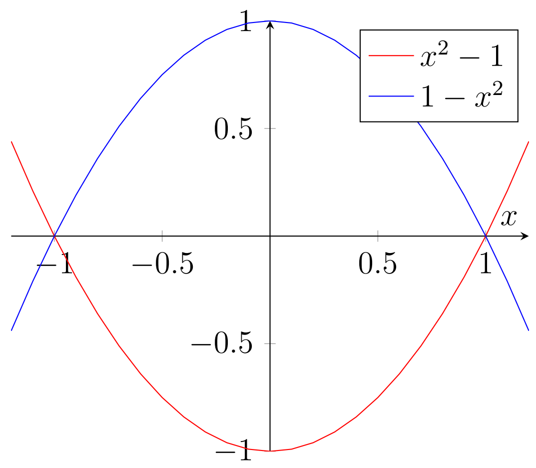
Pelo Teorema Fundamental do Cálculo $g'(x) = \frac{x}{1+x^4}$. (0.5)

Portanto

$$f'(2) = e^{g(2)} g'(2) = e^0 \frac{2}{1+2^4} = \frac{2}{17}. \text{ (0.5)}$$

Q3. **(2.0)** Encontre os valores de c tais que a área da região delimitada pelas parábolas $y = x^2 - c^2$ e $y = c^2 - x^2$ seja $\frac{8}{3}$.

Solução:



Note que se $c = 0$ as parábolas não delimitam uma região. Além disso, podemos supor que $c > 0$ pois para c e $-c$ os gráficos são os mesmos.

A intersecção das parábolas ocorre quando: $x^2 - c^2 = c^2 - x^2$, ou seja, $2x^2 = 2c^2 \Rightarrow x = \pm c$. (0.4)

A área da região é dada por:

$$A \overset{(0.5)}{=} \int_{-c}^{c} (c^2 - x^2) - (x^2 - c^2)dx = 2\int_{-c}^{c} (c^2 - x^2)dx = 2\Big(c^2 x - \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{-c}^{c}$$

$$= 2(c^3 - \frac{c^3}{3}) - (-c^3 + \frac{c^3}{3}) = \frac{8}{3}c^3. \text{ (0.6)}$$

Assim,

$$A = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \frac{8}{3}c^3 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow c^3 = 1 \Leftrightarrow c = 1. \text{ (0.5)}$$

Note que $c = -1$ também é solução, mas os gráficos não mudam.

Q4. (2.0) Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas $y = \sqrt{1+x^2}$ e $y = 2$ em torno do eixo y.

Solução: por seções transversais. Notemos que $y = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow y^2 = 1+x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y^2-1}$ e $1 \leq y \leq 2$ (0.4) . Portanto, o volume é dado por

$$V \overset{(0.8)}{=} \pi \int_1^2 (\sqrt{y^2-1})^2 dy = \pi \int_1^2 (y^2-1)dy = \pi\Big(\frac{y^3}{3}-y\Big)\Big|_1^2 = \pi\Big[\Big(\frac{8}{3}-2\Big)-\Big(\frac{1}{3}-1\Big)\Big] = \frac{4}{3}\pi. \ (0.8)$$

Solução: por cascas cilíndricas Notemos que as curvas de cortam quando $\sqrt{1+x^2} = 2 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$. (0.2) Portanto, o volume é dado por:

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (2x - x\sqrt{1+x^2})dx = 4\pi \int_0^{\sqrt{3}} xdx - 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}dx. \ (0.8)$$

Agora,

$$4\pi \int_0^{\sqrt{3}} xdx = 4\pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = 6\pi. \ (0.3)$$

Fazendo $u = 1+x^2 \Rightarrow du = 2xdx$, para $x = 0 \Rightarrow u = 1$ e $x = \sqrt{3} \Rightarrow u = 4$, assim

$$2\pi \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2})dx = \pi \int_1^4 \sqrt{u}du = \pi\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^4 = \pi\frac{14}{3}. \ (0.5)$$

Portanto,

$$V = 6\pi - \pi\frac{14}{3} = \frac{4}{3}\pi. \ (0.2)$$

Q5. (2.0) (a) Mostre que a área da região entre a curva $y = \dfrac{1}{x}$, $1 \leq x < +\infty$ e o eixo x é infinita.

(b) Mostre que o volume do sólido gerado pela rotação da região do item (a) em torno do eixo x é finita e calcule-la.

Solução:

(a) A área é dada por

$$A \overset{(0.4)}{=} \int_1^\infty \frac{1}{x} dx \overset{(0.2)}{=} \lim_{a \to +\infty} \int_1^a \frac{1}{x} dx = \lim_{a \to +\infty} \ln x \Big|_1^a = \lim_{a \to +\infty} (\ln a - \underbrace{\ln 1}_{=0}) \overset{(0.4)}{=} +\infty.$$

(b) O volume é dado por

$$V \overset{(0.4)}{=} \pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx \overset{(0.2)}{=} \pi \lim_{a \to +\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{a \to +\infty} -\frac{1}{x}\Big|_1^a = \pi \lim_{a \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{a}\right) \overset{(0.4)}{=} \pi.$$