Gabarito da $3^{\underline{a}}$ Prova de MA111 — 17/08/2020
Turmas do Diurno

Questão A(a). (4,5 pontos) Calcule as seguintes integrais. **Justifique** suas respostas.

$$\mathbf{A0}(\mathbf{a})\ \int \frac{\operatorname{tg}^8 x}{\operatorname{sen}^5 x}\,dx,\quad \mathbf{A1}(\mathbf{a})\ \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\operatorname{tg}^5 x}\,dx,\quad \mathbf{A2}(\mathbf{a})\ \int \frac{\cos^4 x}{\operatorname{tg}^3 x}\,dx.$$

Solução de A0(a):

$$\int \frac{\operatorname{tg}^8 x}{\operatorname{sen}^5 x}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^8 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^8 x}\operatorname{sen} x\,dx \quad \begin{cases} u &= \cos x \\ du &= -\operatorname{sen} x\,dx \end{cases} \qquad (0,7)$$

$$= -\int \frac{1-u^2}{u^8}\,du = \int \left(-u^{-8}+u^{-6}\right)\,du \qquad (0,4)$$

$$= \frac{1}{7}u^{-7} - \frac{1}{5}u^{-5} + C = \frac{1}{7}\left(\cos x\right)^{-7} - \frac{1}{5}\left(\cos x\right)^{-5} + C \qquad (0,4)$$

Solução de A1(a):

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\operatorname{tg}^5 x}\,dx = \int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^2}{\operatorname{sen}^2 x}\cos x\,dx \quad \begin{cases} u &= \operatorname{sen} x \\ du &= \cos x\,dx \end{cases} \qquad (0,7)$$

$$= \int \frac{\left(1-u^2\right)^2}{u^2}\,du = \int \left(u^{-2}-2+u^2\right)\,du \qquad (0,4)$$

$$= -\frac{1}{u} - 2u + \frac{u^3}{3} + C = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} - 2\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C \qquad (0,4)$$

Solução de A2(a):

$$\int \frac{\cos^4 x}{\operatorname{tg}^3 x}\,dx = \int \frac{\cos^7 x}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx = \int \frac{\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^3}{\operatorname{sen}^3 x}\cos x\,dx \quad \begin{cases} u &= \operatorname{sen} x \\ du &= \cos x\,dx \end{cases} \qquad (0,7)$$

$$= \int \frac{\left(1-u^2\right)^3}{u^3}\,du = \int \frac{1+3u^4-3u^2-u^6}{u^3}\,du = \int \left(u^{-3}+3u-3u^{-1}-u^3\right)\,du \qquad (0,4)$$

$$= -\frac{u^{-2}}{2} + \frac{3}{2}u^2 - 3\ln|u| - \frac{u^4}{4} + C = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-2} x + \frac{3}{2}\operatorname{sen}^2 x - 3\ln|\operatorname{sen} x| - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x + C \quad (0,4)$$

Questão A(b). (4,5 pontos) Calcule as seguintes integrais. **Justifique** suas respostas.

$$\mathbf{A0(b)}\ \int x^2 \cos(2x)\,dx, \quad \mathbf{A1(b)}\ \int x^2 \cos(3x)\,dx, \quad \mathbf{A2(b)}\ \int x^2 \operatorname{sen}(2x)\,dx.$$

Soluções de A0(b) e A1(b): Para $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, temos

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\cos(ax)\,dx}_{dv} = uv - \int v\,du \qquad \begin{cases} u &= x^2 \\ du &= 2x\,dx \end{cases} \quad \begin{cases} dv &= \cos(ax)\,dx \\ v &= \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax) \end{cases} \qquad (0,5)$$

$$= \frac{1}{a}x^2 \operatorname{sen}(ax) - \frac{2}{a}\int \underbrace{x}_{\xi} \underbrace{\operatorname{sen}(ax)}_{dw}\,dx \qquad \begin{cases} \xi &= x \\ d\xi &= dx \end{cases} \quad \begin{cases} dw &= \operatorname{sen}(ax)\,dx \\ w &= -\frac{1}{a}\cos(ax) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{a}x^2 \operatorname{sen}(ax) - \frac{2}{a}\left(\xi w - \int w d\xi\right) \qquad (0,5)$$

$$= \frac{1}{a}x^2 \operatorname{sen}(ax) + \frac{2}{a^2}x\cos(ax) - \frac{2}{a^2}\int \cos(ax)\,dx$$

$$= \frac{1}{a}x^2 \operatorname{sen}(ax) + \frac{2}{a^2}x\cos(ax) - \frac{2}{a^3}\operatorname{sen}(ax) + C. \qquad (0,5)$$

Assim tomando $a = 2$ obtemos a solução de A0(b) e tomando $a = 3$ obtemos a solução de A1(b):

$$\mathbf{A0(b)}\ \int x^2 \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{2}x\cos(2x) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C.$$

$$\mathbf{A1(b)}\ \int x^2 \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}x^2 \operatorname{sen}(3x) + \frac{2}{9}x\cos(3x) - \frac{2}{27}\operatorname{sen}(3x) + C.$$

Solução de A2(b):

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\operatorname{sen}(2x)\,dx}_{dv} = uv - \int v\,du \qquad \begin{cases} u &= x^2 \\ du &= 2x\,dx \end{cases} \quad \begin{cases} dv &= \operatorname{sen}(2x)\,dx \\ v &= -\frac{1}{2}\cos(2x) \end{cases} \qquad (0,5)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 \cos(2x) + \int \underbrace{x}_{\xi} \underbrace{\cos(2x)}_{dw}\,dx \qquad \begin{cases} \xi &= x \\ d\xi &= dx \end{cases} \quad \begin{cases} dw &= \cos(2x)\,dx \\ w &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 \cos(2x) + \left(\xi w - \int w d\xi\right) \qquad (0,5)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2}x\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(2x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 \cos(2x) + \frac{1}{2}x\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C. \qquad (0,5)$$

Questão A(c). (4,5 pontos) Calcule as seguintes integrais. **Justifique** suas respostas.

$$\textbf{A0} \int \frac{2x^2+2x+1}{(x-1)(x^2+4)}\,dx, \quad \textbf{A1} \int \frac{2x^2+x+2}{(x-1)(x^2+4)}\,dx, \quad \textbf{A2} \int \frac{2x^2+4x-1}{(x-1)(x^2+4)}\,dx.$$

Solução: Sejam $b, c \in \mathbb{R}$ tal que $2+b+c=5$. Temos que

$$\frac{2x^2+bx+c}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+4)}, \qquad \color{red}{(0,3)}$$

então

$$2x^2+bx+c = (A+B)x^2 + (C-B)x + (4A-C$$

e assim

$$\begin{cases} A+B &= 2 \\ C-B &= b \\ 4A-C &= c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5A &= 2+b+c=5 \\ B &= 2-A \\ C &= 4A-c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= 1 \\ B &= 1 \\ C &= 4-c. \end{cases} \qquad \color{red}{(0,4)}$$

Portanto

$$\frac{2x^2+bx+c}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{x+C}{x^2+4} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+4} + \frac{4-c}{x^2+4}$$

e logo

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2+bx+c}{(x-1)(x^2+4)}\,dx &= \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+4} + \int \frac{(4-c)\,dx}{x^2+4} \qquad \color{red}{(0,3)} \\ &= \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + \frac{4-c}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + K. \qquad \color{red}{(0,5)} \end{aligned}$$

Tomando $b=2, c=1$ obtemos a solução de A0(c), $b=1, c=2$ a solução de A1(c) e $b=4, c=-1$ a solução de A2(c), isto é:

$$\textbf{A0(c)} \int \frac{2x^2+2x+1}{(x-1)(x^2+4)}\,dx = \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + K,$$

$$\textbf{A1(c)} \int \frac{2x^2+x+2}{(x-1)(x^2+4)}\,dx = \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + K,$$

$$\textbf{A2(c)} \int \frac{2x^2+4x-1}{(x-1)(x^2+4)}\,dx = \ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + K.$$

Questão B0. (1,5 pontos) Calcule a derivada da função abaixo. **Justifique** sua resposta.

$$h(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt[3]{\operatorname{arcsen} t}\, dt.$$

Solução: Temos que $h(x) = g(f(x))$ onde

$$g(x) = \int_0^{x} \sqrt[3]{\operatorname{arcsen} t}\, dt, \qquad f(x) = \operatorname{sen} x. \quad (0,3)$$

Pelo T.F.C segue que $g'(x) = \sqrt[3]{\operatorname{arcsen} x}$ (0,5)
e aplicando a Regra da Cadeia obtemos

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x))f'(x) = \sqrt[3]{\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)}\cos x \quad (0,5) \\ &= \sqrt[3]{x}\cos x. \quad (0,2) \end{aligned}$$

Questão B1. (1,5 pontos) Calcule a derivada da função abaixo. **Justifique** sua resposta.

$$h(x) = \int_0^{\cos x} \sqrt[3]{\arccos t}\, dt.$$

Solução: Temos que $h(x) = g(f(x))$ onde

$$g(x) = \int_0^{x} \sqrt[3]{\arccos t}\, dt, \qquad f(x) = \cos x. \quad (0,3)$$

Pelo T.F.C segue que $g'(x) = \sqrt[3]{\arccos x}$ (0,5)
e aplicando a Regra da Cadeia obtemos

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x))f'(x) = \sqrt[3]{\arccos(\cos x)}(-\operatorname{sen} x) \quad (0,5) \\ &= -\sqrt[3]{x}\operatorname{sen} x. \quad (0,2) \end{aligned}$$

Questão B2. (1,5 pontos) Calcule a derivada da função abaixo. **Justifique** sua resposta.

$$h(x) = \int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt[3]{\operatorname{arctg} t}\, dt.$$

Solução: Temos que $h(x) = g(f(x))$ onde

$$g(x) = \int_0^{x} \sqrt[3]{\operatorname{arctg} t}\, dt, \qquad f(x) = \operatorname{tg} x. \quad (0,3)$$

Pelo T.F.C segue que $g'(x) = \sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}$ (0,5)
e aplicando a Regra da Cadeia obtemos

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x))f'(x) = \sqrt[3]{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)}\sec^2 x \quad (0,5) \\ &= \sqrt[3]{x}\sec^2 x. \quad (0,2) \end{aligned}$$

Questão C0. (2 pontos) Calcule a área da região delimitada pelos gráficos das funções:

$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x - 16, \quad g(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x + 20.$$

Solução: Temos que

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 - 16 = -2x^2 + 20 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3, \quad {\color{red}(0,4)}$$
$$f(0) = -16 < 20 = g(0) \Rightarrow f(x) \leq g(x), \ \forall \ x \in [-3,3]. \quad {\color{red}(0,4)}$$

Portanto

$$\text{Área} = \int_{-3}^{3} (g(x) - f(x)) \ dx = \int_{-3}^{3} \left(36 - 4x^2\right) \ dx \quad {\color{red}(0,7)}$$
$$= \left(36x - \frac{4}{3}x^3\right)\Big|_{-3}^{3} = 36(6) - \frac{4}{3}(27+27) = 216 - 72 = 144. \quad {\color{red}(0,5)}$$

Questão C1. (2 pontos) Calcule a área da região delimitada pelos gráficos das funções:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 8x - 26, \quad g(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x + 10.$$

Solução: Temos que

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x^2 - 26 = -x^2 + 10 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3, \quad {\color{red}(0,4)}$$
$$f(0) = -26 < 10 = g(0) \Rightarrow f(x) \leq g(x), \ \forall \ x \in [-3,3]. \quad {\color{red}(0,4)}$$

Portanto

$$\text{Área} = \int_{-3}^{3} (g(x) - f(x)) \ dx = \int_{-3}^{3} \left(36 - 4x^2\right) \ dx \quad {\color{red}(0,7)}$$
$$= \left(36x - \frac{4}{3}x^3\right)\Big|_{-3}^{3} = 36(6) - \frac{4}{3}(27+27) = 216 - 72 = 144. \quad {\color{red}(0,5)}$$

Questão C2. (2 pontos) Calcule a área da região delimitada pelos gráficos das funções:

$$f(x) = -x^4 + 4x^3 + x^2 - 3x + 10, \quad g(x) = -x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 3x + 46.$$

Solução: Temos que

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 10 = -3x^2 + 46 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3, \quad {\color{red}(0,4)}$$
$$f(0) = 10 < 46 = g(0) \Rightarrow f(x) \leq g(x), \ \forall \ x \in [-3,3]. \quad {\color{red}(0,4)}$$

Portanto

$$\text{Área} = \int_{-3}^{3} (g(x) - f(x)) \ dx = \int_{-3}^{3} \left(36 - 4x^2\right) \ dx \quad {\color{red}(0,7)}$$
$$= \left(36x - \frac{4}{3}x^3\right)\Big|_{-3}^{3} = 36(6) - \frac{4}{3}(27+27) = 216 - 72 = 144. \quad {\color{red}(0,5)}$$

Questão D0. (2 pontos) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x, da região delimitada pelos gráficos das funções:

$$f(x) = \sqrt{\cos^2 x + x^2 - 1}, \quad g(x) = \cos x.$$

Solução: Temos que

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \cos^2 x + x^2 - 1 = \cos^2 x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1, \quad (0,4)$$

$$f(0) = 0 < 1 = g(0) \Rightarrow f(x) \leq g(x), \ \forall x \in [-1,1]. \quad (0,4)$$

Seja $A(x)$ a área da seção transversal do sólido, perpendicular ao eixo x e passando por x. Então

$$A(x) = \pi\,(g(x))^2 - \pi\,(f(x))^2 = \pi(1 - x^2). \quad (0,4)$$

Como $A(x)$ é uma função par

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= 2\int_0^1 A(x)\,dx = 2\pi\int_0^1 (1 - x^2)\,dx \quad (0,4)\\ &= 2\pi\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 2\pi\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi. \quad (0,4)\end{aligned}$$

Questão D1. (2 pontos) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x, da região delimitada pelos gráficos das funções:

$$f(x) = \sqrt{2\cos^2 x + x^2 - 1}, \quad g(x) = \sqrt{2}\cos x.$$

Solução: Temos que

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2\cos^2 x + x^2 - 1 = 2\cos^2 x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1, \quad (0,4)$$

$$f(0) = 1 < \sqrt{2} = g(0) \Rightarrow f(x) \leq g(x), \ \forall x \in [-1,1]. \quad (0,4)$$

Seja $A(x)$ a área da seção transversal do sólido, perpendicular ao eixo x e passando por x. Então

$$A(x) = \pi\,(g(x))^2 - \pi\,(f(x))^2 = \pi(1 - x^2). \quad (0,4)$$

Como $A(x)$ é uma função par

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= 2\int_0^1 A(x)\,dx = 2\pi\int_0^1 (1 - x^2)\,dx \quad (0,4)\\ &= 2\pi\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 2\pi\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi. \quad (0,4)\end{aligned}$$

Questão D2. (2 pontos) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x, da região delimitada pelos gráficos das funções:

$$f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + 1 - x^2}, \quad g(x) = |\operatorname{sen} x|.$$

Solução: Temos que

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x + 1 - x^2 = \operatorname{sen}^2 x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1, \quad (0,4)$$

$$f(0) = 1 > 0 = g(0) \Rightarrow f(x) \geq g(x), \ \forall\, x \in [-1, 1]. \quad (0,4)$$

Seja $A(x)$ a área da seção transversal do sólido, perpendicular ao eixo x e passando por x. Então

$$A(x) = \pi\,(f(x))^2 - \pi\,(g(x))^2 = \pi(1 - x^2). \quad (0,4)$$

Como $A(x)$ é uma função par

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= 2\int_0^1 A(x)\,dx = 2\pi \int_0^1 (1 - x^2)\,dx \quad (0,4) \\ &= 2\pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = 2\pi \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi. \quad (0,4) \end{aligned}$$