Gabarito da $3^{\underline{a}}$ Prova de MA111 — 17/08/2020
Turmas do Noturno

Questão A(a). (4,5 pontos) Calcule as seguintes integrais. **Justifique** suas respostas.

$$\mathbf{A0(a)}\ \int \operatorname{tg}^5 x \sec^6 x\, dx, \quad \mathbf{A1(a)}\ \int \frac{\sec^6 x}{\operatorname{tg}^5 x}\, dx, \quad \mathbf{A2(a)}\ \int \operatorname{tg}^5 x \sec^5 x\, dx.$$

Resolução de A0(a): Temos que

$$\int \operatorname{tg}^5 x \sec^6 x\, dx = \int \operatorname{tg}^5 x\, (\sec^2 x)^2 \sec^2 x\, dx = \int \operatorname{tg}^5 x\, (1+\operatorname{tg}^2 x)^2 \sec^2 x\, dx.$$

Então fazendo a substituição $u = \operatorname{tg} x$ obtemos $du = \sec^2 x\, dx$ e assim

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^5 x \sec^6 x\, dx &= \int u^5(1+u^2)^2\, du = \int (u^5 + 2u^7 + u^9)\, du \quad {\color{red}(0,8)}\\ &= \frac{u^6}{6} + \frac{2u^8}{8} + \frac{u^{10}}{10} + C \quad {\color{red}(0,4)}\\ &= \frac{\operatorname{tg}^6 x}{6} + \frac{\operatorname{tg}^8 x}{4} + \frac{\operatorname{tg}^{10} x}{10} + C. \quad {\color{red}(0,3)}\end{aligned}$$

Resolução de A1(a): Temos que

$$\int \frac{\sec^6 x}{\operatorname{tg}^5 x}\, dx = \int \frac{\sec^4 x \sec^2 x}{\operatorname{tg}^5 x}\, dx = \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^2 \sec^2 x}{\operatorname{tg}^5 x}\, dx.$$

Fazendo a substituição $u = \operatorname{tg} x$ obtemos $du = \sec^2 x\, dx$ e assim

$$\begin{aligned}\int \frac{\sec^6 x}{\operatorname{tg}^5 x}\, dx &= \int \frac{(1+u^2)^2}{u^5}\, du = \int \frac{1+2u^2+u^4}{u^5}\, du \quad {\color{red}(0,8)}\\ &= \int (u^{-5} + 2u^{-3} + u^{-1})\, du = -\frac{u^{-4}}{4} - u^{-2} + \ln|u| + C \quad {\color{red}(0,4)}\\ &= -\frac{(\operatorname{tg} x)^{-4}}{4} - (\operatorname{tg} x)^{-2} + \ln|\operatorname{tg} x| + C. \quad {\color{red}(0,3)}\end{aligned}$$

Resolução de A2(a): Temos que

$$\int \operatorname{tg}^5 x \sec^5 x\, dx = \int \operatorname{tg}^4 x\ \sec^4 x \sec x\ \operatorname{tg} x\, dx. = \int (\sec^2 x - 1)^2\ \sec^4 x\ \sec x\ \operatorname{tg} x\, dx.$$

Fazendo a substituição $u = \sec x$ obtemos $du = \sec x\ \operatorname{tg} x\, dx$ e assim

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^5 x \sec^5 x\, dx &= \int (u^2-1)^2 u^4\, du = \int (u^4 - 2u^2 + 1)u^4\, du \quad {\color{red}(0,8)}\\ &= \int (u^8 - 2u^6 + u^4)\, du = \frac{u^9}{9} - \frac{2u^7}{7} + \frac{u^5}{5} + C \quad {\color{red}(0,4)}\\ &= \frac{\sec^9 x}{9} - \frac{2\sec^7 x}{7} + \frac{\sec^5 x}{5} + C. \quad {\color{red}(0,3)}\end{aligned}$$

Questão A(b). (4,5 pontos) Calcule as seguintes integrais. **Justifique** suas respostas.

$$\mathbf{A0}(\mathbf{b}) \int \frac{\ln x}{x^{1/2}}\, dx, \quad \mathbf{A1}(\mathbf{b}) \int \frac{\ln x}{x^{1/3}}\, dx, \quad \mathbf{A2}(\mathbf{b}) \int \frac{\ln x}{x^{1/4}}\, dx.$$

Resolução: Para $m \in \mathbb{R}, m \neq 1$, consideremos a integral

$$\int \frac{\ln x}{x^m}\, dx = \int (\ln x) x^{-m}\, dx.$$

Usando integração por partes com $u = \ln x$ e $dv = x^{-m}\, dx$ chegamos a

$$du = \frac{dx}{x}, \qquad v = \frac{x^{1-m}}{1-m}, \qquad (0,4)$$

e assim

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{x^m}\, dx = \int u\, dv &= uv - \int v\, du \\
&= \frac{x^{1-m}}{1-m} \ln x - \frac{1}{1-m} \int x^{-m}\, dx \qquad (0,4) \\
&= \frac{x^{1-m}}{1-m} \ln x - \frac{1}{1-m} \frac{x^{1-m}}{1-m} + C \qquad (0,4) \\
&= \frac{x^{1-m}}{1-m} \left(\ln x - \frac{1}{1-m} \right) + C. \qquad (0,3)
\end{aligned}$$

Tomando $m = 1/2$ obtemos a solução de A0(b), $m = 1/3$ a solução de A1(b) e $m = 1/4$ a solução de A2(b), isto é:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A0}(\mathbf{b}) \quad & \int \frac{\ln x}{x^{1/2}}\, dx = 2x^{1/2} (\ln x - 2) + C, \\
\mathbf{A1}(\mathbf{b}) \quad & \int \frac{\ln x}{x^{1/3}}\, dx = \frac{3}{2} x^{2/3} \left(\ln x - \frac{3}{2} \right) + C, \\
\mathbf{A2}(\mathbf{b}) \quad & \int \frac{\ln x}{x^{1/4}}\, dx = \frac{4}{3} x^{3/4} \left(\ln x - \frac{4}{3} \right) + C.
\end{aligned}$$

Questão A(c). (4,5 pontos) Calcule as seguintes integrais. **Justifique** suas respostas.

$$\mathbf{A0}\ \int \frac{2x^2+x-2}{(x-1)(x-2)^2}\,dx,\quad \mathbf{A1}\ \int \frac{2x^2-2x+1}{(x-1)(x-2)^2}\,dx,\quad \mathbf{A2}\ \int \frac{2x^2+2x-3}{(x-1)(x-2)^2}\,dx.$$

Resolução: Sejam $b, c \in \mathbb{R}$ tal que $2+b+c=1$. temos que

$$\begin{aligned}\frac{2x^2+bx+c}{(x-1)(x-2)^2} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}\\ &= \frac{(A+B)x^2+(-4A-3B+C)x+(4A+2B-C)}{(x-1)(x-2)^2}. \quad {\color{red}(0,3)}\end{aligned}$$

Então

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} A & + & B & & & = & 2\\ -4A & - & 3B & + & C & = & b\\ 4A & + & 2B & - & C & = & c\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} A & = 2+b+c=1,\\ B & = 2-A=1,\\ C & = b+4A+3B=b+7.\end{array}\right. \quad {\color{red}(0,4)}$$

Portanto

$$\frac{2x^2+bx+c}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{b+7}{(x-2)^2}$$

e logo

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+bx+c}{(x-1)(x-2)^2}\,dx &= \int \frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{(b+7)\,dx}{(x-2)^2} \quad {\color{red}(0,3)}\\ &= \ln|x-1|+\ln|x-2|-\frac{b+7}{x-2}+C. \quad {\color{red}(0,5)}\end{aligned}$$

Tomando $b=1, c=-2$ obtemos a solução de A0(c), $b=-2, c=1$ a solução de A1(c) e $b=2, c=-3$ a solução de A2(c), isto é:

$$\mathbf{A0}(\mathbf{c})\ \int \frac{2x^2+x-2}{(x-1)(x-2)^2}\,dx = \ln|x-1|+\ln|x-2|-\frac{8}{x-2}+C.$$

$$\mathbf{A1}(\mathbf{c})\ \int \frac{2x^2-2x+1}{(x-1)(x-2)^2}\,dx = \ln|x-1|+\ln|x-2|-\frac{5}{x-2}+C.$$

$$\mathbf{A2}(\mathbf{c})\ \int \frac{2x^2+2x-3}{(x-1)(x-2)^2}\,dx = \ln|x-1|+\ln|x-2|-\frac{9}{x-2}+C.$$

Questão B0. (1,5 pontos) Calcule a derivada da função abaixo. **Justifique** sua resposta.

$$h(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \ln(1+t^4)\,dt.$$

Resolução: Defina

$$g(x) = \int_0^{x} \ln(1+t^4)\,dt, \qquad f(x) = \operatorname{sen} x.$$

Note que

$$h(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} \ln(1+t^4)\,dt = g(f(x)). \quad (0,4)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que $g'(x) = \ln(1+x^4)$. Agora, pela Regra da Cadeia, $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$. (0,5) Portanto,

$$h'(x) = \left[\ln(1+\operatorname{sen}^4 x)\right] \cdot \cos x. \quad (0,6)$$

Questão B1. (1,5 pontos) Calcule a derivada da função abaixo. **Justifique** sua resposta.

$$h(x) = \int_0^{x^3} \operatorname{tg}(1+t^4)\,dt.$$

Resolução: Defina

$$g(x) = \int_0^{x} \operatorname{tg}(1+t^4)\,dt, \qquad f(x) = x^3.$$

Note que

$$h(x) = \int_0^{x^3} \operatorname{tg}(1+t^4)\,dt = g(f(x)). \quad (0,4)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que $g'(x) = \operatorname{tg}(1+x^4)$. Agora, pela Regra da Cadeia, $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$. (0,5) Portanto,

$$h'(x) = \left[\operatorname{tg}\left(1+x^{12}\right)\right] \cdot 3x^2. \quad (0,6)$$

Questão B2. (1,5 pontos) Calcule a derivada da função abaixo. **Justifique** sua resposta.

$$h(x) = \int_1^{\cos x} e^{1+t^4}\,dt.$$

Resolução: Defina

$$g(x) = \int_1^{x} e^{1+t^4}\,dt, \qquad f(x) = \cos x.$$

Note que

$$h(x) = \int_0^{\cos x} e^{1+t^4}\,dt = g(f(x)). \quad (0,4)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que $g'(x) = e^{1+x^4}$. Agora, pela Regra da Cadeia, $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$. (0,5) Portanto,

$$h'(x) = -\left(e^{1+\cos^4 x}\right) \cdot \operatorname{sen} x. \quad (0,6)$$

Questão C0. (2 pontos) Calcule a área da região delimitada pelos gráficos das funções:

$$f(x) = e^{-x} + x^4 - 2x^2 + x - 2, \quad g(x) = e^{-x} + x^4 - 5x^2 + x + 10.$$

Resolução: Temos que

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -2x^2 - 2 = -5x^2 + 10 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2, \quad (0,4)$$

$$f(0) = -2 < 10 = g(0) \Rightarrow f(x) \leq g(x), \; \forall \, x \in [-2, 2]. \quad (0,4)$$

Portanto a área é dada por

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^{2} [g(x) - f(x)] \; dx = \int_{-2}^{2} (12 - 3x^2) \; dx \quad (0,7) \\ &= \left(12x - x^3\right) \Big|_{-2}^{2} = 12(2+2) - (2^3 + 2^3) = 32. \quad (0,5) \end{aligned}$$

Questão C1. (2 pontos) Calcule a área da região delimitada pelos gráficos das funções:

$$f(x) = e^{x} + 2x^2 - 3x + 4, \quad g(x) = e^{x} - x^2 - 3x + 16.$$

Resolução: Temos que

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 + 4 = -x^2 + 16 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2, \quad (0,4)$$

$$f(0) = 4 < 16 = g(0) \Rightarrow f(x) \leq g(x), \; \forall \, x \in [-2, 2]. \quad (0,4)$$

Portanto a área é dada por

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^{2} [g(x) - f(x)] \; dx = \int_{-2}^{2} (12 - 3x^2) \; dx \quad (0,7) \\ &= \left(12x - x^3\right) \Big|_{-2}^{2} = 12(2+2) - (2^3 + 2^3) = 32. \quad (0,5) \end{aligned}$$

Questão C2. (2 pontos) Calcule a área da região delimitada pelos gráficos das funções:

$$f(x) = \operatorname{sen}(2x) - x^2 + 2x + 1, \quad g(x) = \operatorname{sen}(2x) - 4x^2 + 2x + 13.$$

Resolução: Temos que

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^2 + 1 = -4x^2 + 13 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2, \quad (0,4)$$

$$f(0) = 1 < 13 = g(0) \Rightarrow f(x) \leq g(x), \; \forall \, x \in [-2, 2]. \quad (0,4)$$

Portanto a área é dada por

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-2}^{2} [g(x) - f(x)] \; dx = \int_{-2}^{2} (12 - 3x^2) \; dx \quad (0,7) \\ &= \left(12x - x^3\right) \Big|_{-2}^{2} = 12(2+2) - (2^3 + 2^3) = 32. \quad (0,5) \end{aligned}$$

Questão D0. (2 pontos) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x, da região delimitada pelos gráficos das funções:

$$f(x) = \sqrt{e^{2x} + 2e^x + 17 - x^4}, \quad g(x) = e^x + 1.$$

Resolução: Temos que

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) \Leftrightarrow (f(x))^2 = (g(x))^2 \Leftrightarrow e^{2x} + 2e^x + 17 - x^4 = e^{2x} + 2e^x + 1 \\ \Leftrightarrow 17 - x^4 = 1 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 2, \quad \color{red}{(0,4)} \end{aligned}$$

$$f(0) = \sqrt{20} > 2 = g(0) \Rightarrow f(x) \geq g(x), \ \forall\, x \in [-2, 2]. \quad \color{red}{(0,4)}$$

A área da seção transversal do sólido, perpendicular ao eixo x e passando por x é dada por:

$$A(x) = \pi\left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right] = \pi(16 - x^4). \quad \color{red}{(0,4)}$$

Portanto, como $A(x)$ é uma função par, o volume do sólido é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \int_{-2}^{2} A(x)\, dx = \int_{-2}^{2} \pi(16 - x^4)\, dx = 2\pi \int_0^2 (16 - x^4)\, dx \quad \color{red}{(0,4)} \\ &= 2\pi\left(16x - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = 2\pi\left(32 - \frac{32}{5}\right) = \frac{256\pi}{5}. \quad \color{red}{(0,4)} \end{aligned}$$

Questão D1. (2 pontos) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x, da região delimitada pelos gráficos das funções:

$$f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}^2(2x) - 2\operatorname{sen}(2x) + 17 - x^4}, \quad g(x) = 1 - \operatorname{sen}(2x).$$

Resolução: Temos que

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) \Leftrightarrow (f(x))^2 = (g(x))^2 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2(2x) - 2\operatorname{sen}(2x) + 17 - x^4 = 1 - 2\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}^2(2x) \\ \Leftrightarrow 17 - x^4 = 1 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 2, \quad \color{red}{(0,4)} \end{aligned}$$

$$f(0) = \sqrt{17} > 1 = g(0) \Rightarrow f(x) \geq g(x), \ \forall\, x \in [-2, 2]. \quad \color{red}{(0,4)}$$

A área da seção transversal do sólido, perpendicular ao eixo x e passando por x é dada por:

$$A(x) = \pi\left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right] = \pi(16 - x^4). \quad \color{red}{(0,4)}$$

Portanto, como $A(x)$ é uma função par, o volume do sólido é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \int_{-2}^{2} A(x)\, dx = \int_{-2}^{2} \pi(16 - x^4)\, dx = 2\pi \int_0^2 (16 - x^4)\, dx \quad \color{red}{(0,4)} \\ &= 2\pi\left(16x - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = 2\pi\left(32 - \frac{32}{5}\right) = \frac{256\pi}{5}. \quad \color{red}{(0,4)} \end{aligned}$$

Questão D2. (2 pontos) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x, da região delimitada pelos gráficos das funções:

$$f(x) = \sqrt{\cos^2 x + 2\cos x + 17 - x^4}, \quad g(x) = 1 + \cos x.$$

Resolução: Temos que

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow (f(x))^2 = (g(x))^2 \Leftrightarrow \cos^2 x + 2\cos x + 17 - x^4 = 1 + 2\cos x + \cos^2 x \\ &\Leftrightarrow 17 - x^4 = 1 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 2, \quad (0,4) \end{aligned}$$

$$f(0) = \sqrt{20} > 2 = g(0) \Rightarrow f(x) \geq g(x),\ \forall\, x \in [-2, 2]. \quad (0,4)$$

A área da seção transversal do sólido, perpendicular ao eixo x e passando por x é dada por:

$$A(x) = \pi \left[(f(x))^2 - (g(x))^2\right] = \pi(16 - x^4). \quad (0,4)$$

Portanto, como $A(x)$ é uma função par, o volume do sólido é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \int_{-2}^{2} A(x)\, dx = \int_{-2}^{2} \pi(16 - x^4)\, dx = 2\pi \int_{0}^{2} (16 - x^4)\, dx \quad (0,4) \\ &= 2\pi \left(16x - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = 2\pi \left(32 - \frac{32}{5}\right) = \frac{256\pi}{5}. \quad (0,4) \end{aligned}$$