Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp
MA111- Primeiro Semestre de 2014
$1^{\underline{a}}$ Prova - 03/04/2014 (5^a-Noturno)

Nome: ....

R.A.: .... **Turma:**........

Questção	1	2	3	4	Total
Nota					

Q1.(3.0) Avalie os limites abaixo e encontre o correspondente valor caso exista. **Justifique** suas respostas.

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-6x+7}{x^2+1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 sen(\dfrac{1}{x^{10}})$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{(x^2-1)}$ (d) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x-2}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}\right)$

Solução.

(a) (0.6) Utilizando as propriedades básicas de limites

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} \frac{x^3-6x+7}{x^2+1} &= \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-6x+7)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)} && (0.2)\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to 2} x^3 - 6\lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 7}{\lim\limits_{x\to 2} x^2 + \lim\limits_{x\to 2} 1} && (0.2)\\ &= \frac{2^3-6\cdot 2+7}{2^2+1} = \frac{3}{5} && (0.2) \end{aligned}$$

(b) (0.9) Note que, sempre temos

$$-1 \le \sin\left(\frac{1}{x^{10}}\right) \le 1 \qquad (0.3)$$

Logo, multiplicando ambos lados das desigualdades pelaquantidade positiva x^2, tem-se

$$-x^2 \le x^2 \sin\left(\frac{1}{x^{10}}\right) \le x^2 \qquad (0.2)$$

Então, podemos aplicar o Teorema do Confronto, sendo que

$$\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0 \qquad e \qquad \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \tag{0.2}$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^{10}}\right) = 0 \tag{0.2}$$

(c) (0.7) Racionalizando as raises e aplicando diferença de quadrados temos,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+7}-3}{(x^2-1)} &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+7}-3}{(x^2-1)} \times \frac{\sqrt{2x+7}+3}{\sqrt{2x+7}+3} && (0.2)\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{2x+7}\right)^2 - 3^2}{(x^2-1)(\sqrt{2x+7}+3)} && (0.2)\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{2x+7-9}{(x-1)(x+1)(\sqrt{2x+7}+3)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{2x+7}+3)} && (0.2)\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{2}{(x+1)(\sqrt{2x+7}+3)}\\
&= \frac{2}{(1+1)(\sqrt{2+7}+3)} = \frac{1}{6} && (0.1)
\end{aligned}$$

(d) (0.8) Analizando por separado, note que o númerador $x-2$ aproximase de -1, quando $x \to 1^+(x>1)$. (0.3)

Por outro lado, $\cos(\frac{\pi}{2}x)$ fica perto do zero, mas $\frac{\pi}{2}x$ esta no segundo quadrante quando $x \to 1^+(x>1)$, onde o cosseno é negativo. (0.3)

Então,

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-2}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}\right) = +\infty \tag{0.2}$$

Q2.(2.5) Sejam m e b constantes e $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & ,\text{ se } \quad x \geq 1 \\ mx+b & ,\text{ se } \quad x < 1 \end{cases}.$$

(a) Encontre os valores de m e b para que f seja derivável em $x=1$.

(b) Com os valores de m e b do item (a), encontre o ponto do gráfico de $f(x)$ onde a reta tangente é paralela à reta $y = 18x - 7$.

Solução.

(a) (1.5) Uma vez que f é uma função por partes, devemos analizar a diferenciabilidade à direita e à esquerda do ponto $x = 1$, lembrando que para f ser derivávcel em $x - 1$, devemos ter

$$f'_+(1) = f'_-(1) \qquad (0.2)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
f'_+(1) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{3(1+h)^2 - 3}{h} && (0.2) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{3(1+2h+h^2) - 3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{6h + 3h^2}{h} && (0.2) \\
&= \lim_{h\to 0^+} (6 + 3h) \;=\; 6 && (0.1)
\end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned}
f'_-(1) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{m(1+h) + b - 3}{h} && (0.2) \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{mh + m + b - 3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \left(m + \frac{m + b - 3}{h} \right) && (0.2) \\
&= m + \lim_{h\to 0^-} \frac{m + b - 3}{h} && (0.1)
\end{aligned}$$

para que f seja derivável em $x = 1$, as derivadas laterais tem de ser iguais, portanto o limite anterior deverá satisfazer duas condições,

$$m = 6 \qquad e \qquad m + b - 3 = 0 \qquad (0.3)$$

isto é, $m = 6$, $b = -3$.

(b) (1.0) Note que com os valores de m e b do item anterior $f'(x) = 6x$, (0.3)
ou seja, a reta tangente á função no ponto $(p, f(p))$ tem inclinação $6p$ (0.4)

para as retas serem paralelas $6p = 18$, i,e. $p = 3$, então o ponto será $(3, f(3)) = (3, 27)$. (0.3)

Q3.(3.0) Calcule a derivada das seguintes funções, usando as regras de derivação:

(a) $f(x) = 10x^{11} - 5x^{10} + 7x^4 + x^3 - 15$

(b) $g(x) = (\sqrt[3]{x} + e^x)(3x^5 + \sqrt[4]{x})$

(c) $h(x) = \dfrac{8x - 5x^2}{\sqrt{x} + 10x^9}$

Solução.

(a) (0.7)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(10x^{11} - 5x^{10} + 7x^4 + x^3 - 15\right)' \\
&= \left(10x^{11}\right)' - \left(5x^{10}\right)' + \left(7x^4\right)' + \left(x^3\right)' - (15)' && (0.2) \\
&= 10\left(x^{11}\right)' - 5\left(x^{10}\right)' + 7\left(x^4\right)' + \left(x^3\right)' - 0 && (0.2) \\
&= (10)(11)x^{10} - (5)(10)x^9 + (7)(4)x^3 + 3x^2 && (0.3) \\
&= 110x^{10} - 50x^9 + 28x^3 + 3x^2
\end{aligned}$$

(b) (1.0) Utilizando a regra do produto,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left[(\sqrt[3]{x} + e^x)(3x^5 + \sqrt[4]{x})\right]' \\
&= (\sqrt[3]{x} + e^x)'(3x^5 + \sqrt[4]{x}) + (\sqrt[3]{x} + e^x)(3x^5 + \sqrt[4]{x})' && (0.4)
\end{aligned}$$

Note que, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, de onde $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$. (0.2)

Então,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left[(x^{1/3})' + (e^x)'\right](3x^5 + \sqrt[4]{x}) + (\sqrt[3]{x} + e^x)\left[3(x^5)' + (x^{1/4})'\right] \\
&= \left(\frac{1}{3}x^{1/3-1} + e^x\right)(3x^5 + \sqrt[4]{x}) + (\sqrt[3]{x} + e^x)\left(15x^4 + \frac{1}{4}(x^{1/4-1}\right) && (0.4) \\
&= \left(\frac{1}{3}x^{-2/3} + e^x\right)(3x^5 + \sqrt[4]{x}) + (\sqrt[3]{x} + e^x)\left(15x^4 + \frac{1}{4}(x^{-3/4}\right)
\end{aligned}$$

(c) (1.3) Pela regra do quociente,

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= \left[\frac{8x-5x^2}{\sqrt{x}+10x^9}\right]' \\
&= \frac{(8x-5x^2)'(\sqrt{x}+10x^9)-(8x-5x^2)(\sqrt{x}+10x^9)'}{(\sqrt{x}+10x^9)^2} && (0.6) \\
&= \frac{[8(x)'-5(x^2)']\,(\sqrt{x}+10x^9)-(8x-5x^2)\,[(\sqrt{x})'+10(x^9)']}{(\sqrt{x}+10x^9)^2} && (0.2) \\
&= \frac{(8-10x)(\sqrt{x}+10x^9)-(8x-5x^2)\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}+90x^8\right]}{(\sqrt{x}+10x^9)^2} && (0.5)
\end{aligned}
$$

Q4.(1.5) Use o teorema do valor intermediário (TVI) para mostrar que a equação $2x-4 = \log_2(x)$ tem uma solução no intervalo $(2,4)$.

Solução.

A equação $2x-4=\log_2(x)$, pode ser escrita como $2x-4-\log_2(x)=0$. (0.2)

Mais ainda se chamamos $f(x)=2x-4-\log_2(x)$, então devemos achar uma raiz da equação $f(x)=0$. (0.2)

Vejamos os valores de $f(x)$ nos extremos do intervalo

$$
\begin{aligned}
f(2) &= 2(2)-4-\log_2(2) = -\log_2(2) = -1 && (0.1) \\
f(4) &= 2(4)-4-\log_2(4) = 4-2 = 2 && (0.1)
\end{aligned}
$$

Dado que $f(x)$ é uma função contínua no intervalo $[2,4]$ (0.3)

e

$$f(2)=-1\leq 0\leq 2=f(4) \qquad (0.3)$$

Pelo teorema de Valor Intermediário, existe pelo menos um c no intervalo $(2,4)$, tal que $f(c)=0$. (0.3)