1ª Prova de Cálculo I, quinta-feira, dia 3 de abril

1. Encontre o valor das constantes a e b tal que a função

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & x \leq 1 \\ x + b & x > 1 \end{cases} \qquad (2.0)$$

seja comprovadamente contínua e derivável em $x = 1$.
Solução: (i) Continuidade: Para a função ser contínua em $x = 1$, precisa satisfazer

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \ . \qquad (0.3)$$

Em $x = 1$ temos

$$f(1) = a \cdot 1^2 = a \ . \qquad (0.1)$$

Os limites laterais são:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} ax^2 = a \qquad (0.2)$$

e

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x + b = 1 + b \ . \qquad (0.2)$$

Portanto, para gantir continuidade em $x = 1$, precisamos $a = 1 + b$. $\underline{(0.2)}$
(1.0)

(ii) Diferenciabilidade: Para que a função seja derivável em $x = 1$, precisamos de $f'_-(1) = f'_+(1)$, ou seja

$$\lim_{\Delta x \to 1^-} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 1^+} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \qquad (0.3)$$

Assim,

$$\lim_{\Delta x \to 1^-} \frac{a(1 + \Delta x)^2 - a}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 1^+} \frac{1 + \Delta x + b - a}{\Delta x} \ . \qquad (0.1)$$

Simplificando,

$$\lim_{\Delta x \to 1^-} \frac{2a\Delta x + a\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 1^+} \frac{\Delta x + 1 + b - a}{\Delta x} \ . \qquad (0.1)$$

Usando que $a = 1 + b$, obtemos

$$\lim_{\Delta x \to 1^-} 2a + a\Delta x = \lim_{\Delta x \to 1^+} 1 \ . \qquad (0.1)$$

Calculando os limites, obtemos

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} 2a + a\Delta x = 2a \qquad (0.1)$$

e

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} 1 = 1 \ . \qquad (0.1)$$

Desta forma, obtemos então $a = 1/2$ e $b = a - 1 = -1/2$. $\underline{(0.2)}$
(1.0)

2. Sem usar a regra de L'Hôpital, calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{3\cos(2x) - (2x - 1)e^x}{3x + 4}$ (0.4) (b) $\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7}$ (0.8)

(c) Determine, se existir, a assíntota horizontal da função

$f(x) = \frac{6x^4 - 2x^3}{3x^4 + x^2}$ quando $x \to -\infty$. (0.8)

Solução:

(a) Primeiramente, analisamos os limites do numerador e do denominador.
Numerador:

$$\lim_{x\to 0}(3\cos(2x) - (2x-1)e^x) = 3\cdot\cos(0) - (2\cdot 0 - 1)e^0 = 4\ , \qquad (0.1)$$

onde usamos os teoremas da soma, do produto e da função contínua.
Denominador:

$$\lim_{x\to 0}(3x^5 + 4) = 3\cdot 0^5 + 4 = 4\ , \qquad (0.1)$$

onde usamos os teoremas da soma, do produto e da potência.
Como ambos os limites existem e o limite do denominador é diferente de zero, obtemos pelo teorema da divisão:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\cos(2x) - (2x-1)e^x}{3x+4} = \frac{\lim_{x\to 0}(3\cos(2x) - (2x-1)e^x)}{\lim_{x\to 0}(3x^5+4)} = \frac{4}{4} = 1\ . \qquad \frac{(0.2)}{(0.4)}$$

(b) Os limites do numerador e do denominador são:

$$\lim_{x\to 7}(\sqrt{x+2} - 3) = 0 \qquad (0.1)$$

e

$$\lim_{x\to 7}(x-7) = 0\ . \qquad (0.1)$$

Como numerador e denominador tendem a zero, temos um limite indeterminado. Multiplicando pelo conjugado do numerador, obtemos

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7} = \lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}+3} = \lim_{x\to 7}\frac{(x+2)-9}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)}\ . \qquad (0.3)$$

Simplificando,

$$\lim_{x\to 7}\frac{x-7}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)} = \lim_{x\to 7}\frac{1}{\sqrt{x+2}+3}\ . \qquad (0.1)$$

Nesta expressão, os limites do numerador e do denominador existem. Portanto,

$$\lim_{x\to 7}\frac{1}{\sqrt{x+2}+3} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 7}\sqrt{x+2}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}\ . \qquad \frac{(0.2)}{(0.8)}$$

(c) Para uma função possuir uma assíntota horizontal, o limite da expressão quando x tende a menos infinito, deve existir. Temos então:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{6x^4 - 2x^3}{3x^4 + x^2} = \lim_{x\to -\infty}\frac{(6x^4 - 2x^3)/x^4}{(3x^4 + x^2)/x^4} = \lim_{x\to -\infty}\frac{6 - \overbrace{2/x}^{\to 0}}{3 + \underbrace{1/x^2}_{\to 0}} = \frac{6}{3} = 2. \qquad (0.6)$$

Sendo assim, a função possui a assíntota horizontal $y = 2$ quando $x \to -\infty$. $\frac{(0.2)}{(0.8)}$

3. Calcule, para a função

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 2 \\ x^2, & 2 < x < 3 \\ 12 - x, & x > 3, \end{cases} \qquad (2.0)$$

se existirem, os limites $\lim_{x\to 2} f(x)$ e $\lim_{x\to 3} f(x)$.

Solução: (i) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x = 2$ (0.3)

e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2 = 4.$ (0.3)

Portanto, como estes limites não são iguais, temos $\lim_{x\to 2} f(x) \nexists$. (0.4)

(1.0)

(ii) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x^2 = 9$ (0.3)

e $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (12 - x) = 9.$ (0.3)

Portanto, como estes limites são iguais, temos que $\lim_{x\to 3} f(x) = 9.$ (0.4)

(1.0)

4. Calcule as derivadas das funções dadas:

(a) $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 4x - 14$ (0.4) (b) $g(x) = (2x^4 - x^2)\sqrt{x}$ (0.6)

(c) Calcule $f'(2)$ se

$$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{6x^3 - x} \qquad (1.0)$$

Solução:

(a) $f'(x) = 2 \cdot 4x^{4-1} - 5 \cdot 8x^{3-1} + 8 \cdot 2x^{2-1} + 4 \cdot x^{1-1} - 0 = 8x^3 - 40x^2 + 16x + 4.$ (0.4)

(b) $g'(x) = (2 \cdot 4x^3 - 2x)\sqrt{x} + (2x^4 - x^2)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$ (0.4)

Simplificando,

$g'(x) = (8x^3 - 2x)\sqrt{x} + x^3\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}x\sqrt{x} = (9x^3 - \dfrac{5}{2}x)\sqrt{x}$. (0.2)

(0.6)

(c) $f'(x) = \dfrac{(3 \cdot 2x + 0)(6x^3 - x) - (3x^2 + 1)(6 \cdot 3x^2 - 1)}{(6x^3 - x)^2}.$ (0.6)

Simplificando,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{6x(6x^3 - x) - (3x^2 + 1)(18x^2 - 1)}{(6x^3 - x)^2} \\ &= \frac{36x^4 - 6x^2 - (54x^4 + 18x^2 - 3x^2 - 1)}{(6x^3 - x)^2} \\ &= \frac{-18x^4 - 21x^2 + 1}{(6x^3 - x)^2}. \end{aligned} \qquad (0.2)$$

Portanto, $f'(1) = \dfrac{-18 - 21 + 1}{(6 - 1)^2} = -\dfrac{38}{25}.$ (0.2)

(1.0)

5. Determine, se possível, as retas tangente e normal à função $g(x) = \dfrac{2}{1+2x}$ nos pontos $x = -1/2$ e $x = 1$. (2.0)

Solução: Derivada: $g'(x) = \dfrac{0 \cdot (1+2x) - 1 \cdot (2)}{(1+2x)^2} = \dfrac{-2}{(1+2x)^2}$. (0.4)

Desta forma, a função não é derivável em $x = -1/2$, porque nem a função nem a derivada existe neste ponto. Portanto, não existem retas tangente e normal em $x = -1/2$. (0.4)

Em $x = 1$, temos a inclinação da reta tangente dada pela derivada da função, i.e., $m_t = g'(1) = \dfrac{-2}{(1+2\cdot 1)^2} = -\dfrac{2}{9}$ e, portanto, a inclinação da reta normal dada por $m_n = -\dfrac{1}{m_t} = \dfrac{9}{2}$. (0.4)

Assim, as equações das retas procuradas são:

Reta tangente: $y_t(x) = -\dfrac{2}{9}(x-1) + f(1) = -\dfrac{2}{9}x + \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{2}{9}x + \dfrac{5}{9}$. (0.4)

Reta normal: $y_n(x) = \dfrac{9}{2}(x-1) + f(1) = \dfrac{9}{2}x - \dfrac{9}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{9}{2}x - \dfrac{25}{6}$. (0.4)

(2.0)