Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp

MA111- Primeiro Semestre de 2014

$1^{\underline{a}}$ **Prova - 04/04/2014 (6^a-Noturno)**

Nome: ....

R.A.: .... **Turma:**........

Questção	1	2	3	4	Total
Nota					

Q1.(3.0) Avalie os limites abaixo e encontre o correspondente valor caso exista. **Justifique** suas respostas.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 5^+}\left(\frac{x+1}{x-5}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-7x+10}{3x^3+4}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^8 sen(\frac{x+1}{x})$

Solução.

(a) (0.7) Racionalizando as raises e aplicando diferença de quadrados temos,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4} &= \lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}\times\frac{x+\sqrt{3x-2}}{x+\sqrt{3x-2}} & (0.2)\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{x^2-(\sqrt{3x-2})^2}{(x^2-4)(x+\sqrt{3x-2})} & (0.2)\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3x-2})}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)(x+\sqrt{3x-2})} & (0.2)\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{x-1}{(x+2)(x+\sqrt{3x-2})}\\
&= \frac{2-1}{(2+2)(2+\sqrt{3(2)-2})} = \frac{1}{16} & (0.1)
\end{aligned}$$

(b) (0.8) Analisando por separado, note que o numerador $x+1$ aproximasse de 6, quando $x\to 5^+(x>5)$. (0.3)

Por outro lado, $x-5$ fica perto do zero, mas com valores pequenos positivos quando $x \to 5^+(x > 5)$. (0.3)

Então,

$$\lim_{x\to 5^+} \left(\frac{x+1}{x-5}\right) = +\infty \qquad (0.2)$$

(c) (0.6) Utilizando as propriedades básicas de limites

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{5x^2-7x+10}{3x^3+4} &= \frac{\lim\limits_{x\to 1}(5x^2-7x+10)}{\lim\limits_{x\to 1}(3x^3+4)} && (0.2)\\
&= \frac{5\lim\limits_{x\to 1} x^2 - 7\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 10}{3\lim\limits_{x\to 1} x^3 + \lim\limits_{x\to 1} 4} && (0.2)\\
&= \frac{5\cdot 2^2 - 7\cdot 2 + 10}{3\cdot 2^3 + 4} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7} && (0.2)
\end{aligned}$$

(d) (0.9) Note que, sempre temos

$$-1 \leq \sin\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq 1 \qquad (0.3)$$

Logo, multiplicando ambos lados das desigualdades pela quantidade positiva x^8, tem-se

$$-x^8 \leq x^8 \sin\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq x^8 \qquad (0.2)$$

Então, podemos aplicar o Teorema do Confronto, sendo que

$$\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0 \qquad e \qquad \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad (0.2)$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0} x^8 \sin\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0 \qquad (0.2)$$

Q2.(2.5) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{7x-5}{x+5} & , \text{ se } \quad x \geq 3 \\ \\ 2x-4 & , \text{ se } \quad x < 3 \end{cases}.$$

(a) A função f é contínua em $x = 3$? Justifique sua resposta.

(b) Encontre a assíntota **horizontal** de f quando $x \to \infty$. Existe assíntota vertical em algum ponto?

(c) Para $x > 3$, encontre o ponto do gráfico de $f(x)$ onde a reta tangente é paralela à reta $y = \frac{2}{5}x + 8$.

Solução.

(a) (1.0) Vejamos

1. $f(3) = \frac{7(3)-5}{3+5} = \frac{16}{8} = 2$ (0.2)
2. Uma vez que a função tem duas regras de correspondência devemos analisar os limites laterais,
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{7x-5}{x+5} = \frac{7(3)-5}{3+5} = \frac{16}{8} = 2 \qquad (0.3)$$
e
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (2x-4) = 2(3) - 4 = 2 \qquad (0.3)$$
Portanto,
$$\lim_{x\to 3} f(x) = 2$$
3. Dos items anteriores temos que,
$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) \qquad (0.2)$$
i.e, f é contínua em $x = 3$.

(b)(0.6) Par achar a assintota horizontal, devemos calcular o seguinte limite

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{7x-5}{x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{7x-5}{x}}{\dfrac{x+5}{x}} && (0.2)\\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{7-\dfrac{5}{x}}{1+\dfrac{5}{x}} = \frac{7-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}} && (0.2)\\
&= \frac{7-0}{1+0} = 7
\end{aligned}$$

Então, $y = 7$ é uma assintota horizontal de $f(x)$.

A única possível assintota vertical seria $x = -5$, mas esta indeterminação nunca acontece posto que $\frac{7x-5}{x+5}$, se $X \geq 3$. (0.2) (c)(0.9) Para $x > 3$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{7x-5}{x+5}\right) \\ &= \frac{(7x-5)'(x+5)-(7x-5)(x+5)'}{(x+5)^2} && (0.2) \\ &= \frac{7(x+5)-(7x-5)}{(x+5)^2} \\ &= \frac{40}{(x+5)^2} && (0.1) \end{aligned}$$

Para a reta tangente é paralela à reta $y = \frac{2}{5}x + 8$, devemos ter $f'(x) = \frac{2}{5}$, (0.2)
então

$$\begin{aligned} \frac{40}{(x+5)^2} &= \frac{2}{5} \\ (x+5)^2 &= 100 \\ (x+5)^2 - 10^2 &= 0 \\ (x-5)(x+15) &= 0 && (0.1) \end{aligned}$$

i.e, $x = 5$, *ou* $x = -15$, mas dado que $x > 3$, então temos o ponto de tangencia $x = 5$, (0.1)
assim o ponto no gráfico é $(5, f(5)) = (5, \frac{7(5)-5}{5+5}) = (5, 3)$ (0.2)

Q3.(3.0) Calcule a derivada das seguintes funções, usando as regras de derivação:

(a) $f(x) = 11x^9 - 7x^8 - 9x^5 + 10x^4 - 23$

(b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 3x^7}{e^x + 12x^5}$

(c) $h(x) = (1 + \sqrt[4]{x})(xe^x + \sqrt[3]{x})$

Solução.

(a)(0.7) Utilisando regras basicas de derivação,

$$\begin{aligned} f(x) &= (11x^9 - 7x^8 - 9x^5 + 10x^4 - 23)' \\ &= (11x^9)' - (7x^8)' - (9x^5)' + (10x^4)' - (23)' && (0.2) \\ &= 11(x^9)' - 7(x^8)' - 9(x^5)' + 10(x^4)' - 0 && (0.2) \\ &= (11)(9)x^8 - (7)(8)x^7 - 9(5)x^4 + (10)(4)x^3 && (0.3) \\ &= 99x^8 - 56x^7 - 45x^4 + 40x^3 \end{aligned}$$

(b)(1.3) Debemos aplicar a regra do quociente,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left(\frac{\sqrt{x}+3x^7}{e^x+12x^5}\right)' \\
&= \frac{(\sqrt{x}+3x^7)'(e^x+12x^5)-(\sqrt{x}+3x^7)(e^x+12x^5)'}{(e^x+12x^5)^2} && (0.6) \\
&= \frac{[(\sqrt{x})'+3(x^7)']\,(e^x+12x^5)-(\sqrt{x}+3x^7)\,[(e^x)'+12(x^5)']}{(e^x+12x^5)^2} && (0.2) \\
&= \frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}+21x^6\right](e^x+12x^5)-(\sqrt{x}+3x^7)\,[e^x+60x^4]}{(e^x+12x^5)^2} && (0.5)
\end{aligned}$$

(c)(1.0) Pela regra do produto,

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \left[(1+\sqrt[4]{x})(xe^x+\sqrt[3]{x})\right]' \\
&= (1+\sqrt[4]{x})'(xe^x+\sqrt[3]{x})+(1+\sqrt[4]{x})(xe^x+\sqrt[3]{x})' && (0.4)
\end{aligned}$$

Note que, $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$, de onde $(\sqrt[n]{x})'=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$. (0.2)

Então,

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \left[(1)'+(x^{1/4})'\right](xe^x+\sqrt[3]{x})+(1+\sqrt[4]{x})\left[(xe^x)'+(x^{1/3})'\right] \\
&= \left(0+\frac{1}{4}x^{1/4-1}\right)(xe^x+\sqrt[3]{x})+(1+\sqrt[4]{x})\left[x'e^x+x(e^x)'+\frac{1}{3}x^{1/3-1}\right] && (0.4) \\
&= \frac{1}{4}x^{-3/4}(xe^x+\sqrt[3]{x})+(1+\sqrt[4]{x})\left(e^x+xe^x+\frac{1}{3}x^{-2/3}\right)
\end{aligned}$$

Q4.(1.5) Use o teorema do valor intermediário (TVI) para mostrar que a equação $x^3 = \cos(x)$ tem uma solução no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.

Solução.

A equação $x^3=\cos(x)$, pode ser escrita como $x^3-\cos(x)=0$. (0.2)

Mais ainda se chamamos $f(x)=x^3-\cos(x)$, então devemos achar uma raiz da equação $f(x)=0$. (0.2)

Vejamos os valores de $f(x)$ nos extremos do intervalo

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0^3-\cos(0) = -1 && (0.1) \\
f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^3-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 && (0.1)
\end{aligned}$$

Dado que $f(x)$ é uma função contínua no intervalo $[0,\frac{\pi}{2}]$ (0.3)

e

$$f(0)=-1\le 0\le\left(\frac{\pi}{2}\right)^3=f\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad (0.3)$$

Pelo teorema de Valor Intermediário, existe pelo menos um c no intervalo $(0,\frac{\pi}{2})$, tal que $f(c)=0$. (0.3)