1ª Prova de Cálculo I, sexta-feira, dia 4 de abril

1. Encontre o valor das constantes a e b tal que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x \leq 1 \\ bx & x > 1 \end{cases} \qquad (2.0)$$

seja comprovadamente contínua e derivável em $x = 1$.

Solução: (i) Continuidade: Para a função ser contínua em $x = 1$, precisa satisfazer

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)\ . \qquad (0.3)$$

Em $x = 1$ temos

$$f(1) = 1 + a\ . \qquad (0.1)$$

Os limites laterais são:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2 + a) = 1 + a \qquad (0.2)$$

e

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} bx = b\ . \qquad (0.2)$$

Portanto, para gantir continuidade em $x = 1$, precisamos $1 + a = b$. $\frac{(0.2)}{(1.0)}$

(ii) Diferenciabilidade: Para que a função seja derivável em $x = 1$, precisamos de $f'_-(1) = f'_+(1)$, ou seja

$$\lim_{\Delta x\to 1^-} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 1^+} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \qquad (0.3)$$

Assim,

$$\lim_{\Delta x\to 1^-} \frac{(1+\Delta x)^2 + a - (1+a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 1^+} \frac{b(1+\Delta x) - (1+a)}{\Delta x}\ . \qquad (0.1)$$

Simplificando,

$$\lim_{\Delta x\to 1^-} \frac{2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 1^+} \frac{b\Delta x + b - 1 - a}{\Delta x}\ , \qquad (0.1)$$

Usando que $b = 1 + a$, obtemos

$$\lim_{\Delta x\to 1^-} 2 + \Delta x = \lim_{\Delta x\to 1^+} b\ . \qquad (0.1)$$

Calculando os limites, obtemos

$$\lim_{\Delta x\to 1^-} 2 + \Delta x = 2 \qquad (0.1)$$

e

$$\lim_{\Delta x\to 1^+} b = b\ . \qquad (0.1)$$

Desta forma, obtemos então $b = 2$ e $a = b - 1 = 1$. $\frac{(0.2)}{(1.0)}$

2. Sem usar a regra de L'Hôpital, calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{5x\sin(2x) - (3x+4)e^x}{2x^2 - 2}$ (0.4) (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$ (0.8)

(c) Determine, se existir, a assíntota horizontal da função

$f(x) = \dfrac{3x - 2x^3}{x^3 + 6x^2}$ quando $x \to \infty$. (0.8)

Solução:

(a) Primeiramente, analisamos os limites do numerador e do denominador.
Numerador:

$$\lim_{x\to 0}(5x\sin(2x) - (3x+4)e^x) = 5\cdot 0\cdot \sin(0) - (3\cdot 0+4)e^0 = -4\ , \qquad (0.1)$$

onde usamos os teoremas da soma, do produto e da função contínua.
Denominador:

$$\lim_{x\to 0}(2x^2-2) = 2\cdot 0^2 - 2 = -2\ , \qquad (0.1)$$

onde usamos os teoremas da soma, do produto e da potência.
Como ambos os limites existem e o limite do denominador é diferente de zero, obtemos pelo teorema da divisão:

$$\frac{\lim\limits_{x\to 0}(5x\sin(2x) - (3x+4)e^x}{2x^2-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(5x\sin(2x) - (3x+4)e^x)}{\lim\limits_{x\to 0}(2x^2-2)} = \frac{-4}{-2} = 2\ . \qquad \underline{(0.2)}$$

(0.4)

(b) Os limites do numerador e do denominador são:

$$\lim_{x\to 1}(\sqrt{x+3}-2) = 0 \qquad (0.1)$$

e

$$\lim_{x\to 1}(x-1) = 0\ . \qquad (0.1)$$

Como numerador e denominador tendem a zero, temos um limite indeterminado.
Multiplicando pelo conjugado do numerador, obtemos

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+3)-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}\ . \qquad (0.3)$$

Simplificando,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\ . \qquad (0.1)$$

Nesta expressão, os limites do numerador e do denominador existem. Portanto,

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}\ . \qquad \underline{(0.2)}$$

(0.8)

(c) Para uma função possuir uma assíntota horizontal, o limite da expressão quando x tende a infinito, deve existir. Temos então:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2x^3}{x^3+6x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{(3x-2x^3)/x^3}{(x^3+6x^2)/x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{3/x^2}^{\to 0}-2}{1+\underbrace{6/x}_{\to 0}} = \frac{-2}{1} = -2. \qquad (0.6)$$

Sendo assim, a função possui a assíntota horizontal $y=-2$ quando $x\to\infty$. $\underline{(0.2)}$

(0.8)

3. Calcule, para a função

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ x^2, & 0 < x \le 2 \\ 8 - x, & x > 2, \end{cases} \qquad (2.0)$$

se existirem, os limites $\lim_{x\to 0} f(x)$ e $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Solução: (i) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0$ (0.3)

e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0.$ (0.3)

Portanto, como estes limites são iguais, temos $\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$ (0.4)

(1.0)

(ii) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4$ (0.3)

e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (8 - x) = 6.$ (0.3)

Portanto, como estes limites são diferentes, temos que $\lim_{x\to 2} f(x) \nexists$. (0.4)

(1.0)

4. Calcule as derivada das funções dadas:

(a) $f(x) = 8x^4 + 3x^3 - 15x^2 + 4x - 18$ (0.4) (b) $g(x) = (x^3 - 6\sqrt{x})x^2$ (0.6)

(c) Calcule $f'(1)$ se

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x}{2x^4 + 5} \qquad (1.0)$$

Solução:

(a) $f'(x) = 8 \cdot 4x^{4-1} + 3 \cdot 3x^{3-1} - 15 \cdot 2x^{2-1} + 4 \cdot x^{1-1} - 0 = 32x^3 + 9x^2 - 30x + 4.$ (0.4)

(b) $g'(x) = (3x^2 - 6\dfrac{1}{2\sqrt{x}})x^2 + (x^3 - 6\sqrt{x})2x^1.$ (0.4)

Simplificando,

$$\begin{aligned} g'(x) &= (3x^2 - 6\frac{1}{2\sqrt{x}})x^2 + (x^3 - 6\sqrt{x})2x = 3x^4 - 3x\sqrt{x} + 2x^4 - 12x\sqrt{x} \\ &= 5x^4 - 15x\sqrt{x} \quad . \end{aligned}$$ (0.2)

(0.6)

(c) $f'(x) = \dfrac{(3 \cdot 2x - 5)(2x^4 + 5) - (3x^2 - 5x)(2 \cdot 4x^3 + 0)}{(2x^4 + 5)^2}.$ (0.6)

Simplificando,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x - 5)(2x^4 + 5) - (3x^2 - 5x)8x^3}{(2x^4 + 5)^2} \\ &= \frac{(12x^5 - 10x^4 + 30x - 25 - (24x^5 - 40x^4)}{(2x^4 + 5)^2} \\ &= \frac{-12x^5 + 30x^4 + 30x - 25}{(2x^4 + 5)^2}. \end{aligned}$$ (0.2)

Portanto, $f'(1) = \dfrac{-12 + 30 + 30 - 25}{(2 + 5)^2} = \dfrac{23}{49}.$ (0.2)

(1.0)

5. Determine, se possível, as retas tangente e normal à função $g(x) = \dfrac{2}{5-3x}$ nos pontos $x = 1$ e $x = 5/3$. (2.0)

Solução: Derivada: $g'(x) = \dfrac{0 \cdot (5-3x) - 2 \cdot (-3)}{(5-3x)^2} = \dfrac{6}{(5-3x)^2}$. (0.4)

Desta forma, a função não é derivável em $x = 5/3$, porque nem a função nem a derivada existe neste ponto. Portanto, não existem retas tangente e normal em $x = 5/3$. (0.4)

Em $x = 1$, temos a inclinação da reta tangente dada pela derivada da função, i.e., $m_t = g'(1) = \dfrac{6}{(5-3\cdot 1)^2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ e, portanto, a inclinação da reta normal dada por $m_n = -\dfrac{1}{m_t} = -\dfrac{2}{3}$. (0.4)

Assim, as equações das retas procuradas são:

Reta tangente: $y_t(x) = \dfrac{3}{2}(x-1) + f(1) = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$. (0.4)

Reta normal: $y_n(x) = -\dfrac{2}{3}(x-1) + f(1) = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3} + 1 = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$. (0.4)

(2.0)