Solução da Prova II, sexta-feira, 16 de maio de 2014

1. (a) $f(x) = x^{x-1} = e^{(x-1)\ln x}$, portanto (0.1)

$$f'(x) = e^{(x-1)\ln x}\left[1 \ln x + (x-1)\frac{1}{x}\right] \quad (0.3)$$

$$= x^{x-2}\,(x\ln x + x - 1) \quad (0.1)$$

(b) $g(t) = \dfrac{3t^2 \operatorname{sen} 5t}{t^5-7}$. Por diferenciação logarítmica:

$\ln g(t) = \ln 3 + 2\ln t + \ln(\operatorname{sen} 5t) - \ln(t^5-7)$. (0.1)

Por diferenciação implícita: $\dfrac{1}{g(t)}g'(t) = 0 + \dfrac{2}{t} + \dfrac{1}{\operatorname{sen} 5t}\cdot\cos 5t\cdot 5 - \dfrac{1}{t^5-7}5t^4$. (0.3)

Desta forma $g'(t) = g(t)\left(5\dfrac{\cos 5t}{\operatorname{sen} 5t} + \dfrac{2(t^5-7) - t\cdot 5t^4}{t(t^5-7)}\right)$ (0.1)

$$= \frac{3t^2 \operatorname{sen} 5t}{t^5-7}\left(5\cot 5x - \frac{3t^5+14}{t(t^5-7)}\right) \quad (0.1)$$

$$= \frac{15t^2(t^5-7)\cos 5t - 3t(3t^5+14)\operatorname{sen} 5t}{(t^5-7)^2}. \quad (0.1)$$

(c) $q(y) = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{2y-1}\right) = \operatorname{arcsen}\left((2y-1)^{1/2}\right)$ (0.1)

Múltiplas regras da cadeia (0.1 cada):

$$q'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{2y-1})^2}}\cdot\frac{1}{2}(2y-1)^{-1/2}\cdot 2 \quad (0.3)$$

$$= \frac{1}{[1-(2y-1)]\sqrt{2y-1}} = \frac{1}{2(1-y)\sqrt{2y-1}} \quad (0.2)$$

(d) $h(z) = \cos\left(\dfrac{(z^3+1)\tan z}{z^2-1}\right)$

Regras da cadeia, do produto e do quociente:

$$R'(s) = -\operatorname{sen}\left(\frac{(z^3+1)\tan z}{z^2-1}\right)\times \frac{(3z^2\tan z + (z^3+1)\frac{1}{\cos^2 z})(z^2-1) - (z^3+1)\tan z\cdot 2z}{(z^2-1)^2} \quad (0.5)$$

$$= -\operatorname{sen}\left(\frac{(z^3+1)\tan z}{z^2-1}\right)\times \frac{[3z^2(z^2-1) - 2z(z^3+1)]\operatorname{sen} z\cos z + (z^3+1)(z^2-1)}{(z^2-1)^2\cos^2 z} \quad (0.1)$$

$$= -\operatorname{sen}\left(\frac{(z^3+1)\tan z}{z^2-1}\right)\frac{(z^4-3z^2-z)\operatorname{sen} z\cos z + z^5 - z^3 + z^2 - 1}{(z^2-1)^2\cos^2 z} \quad (0.1)$$

2. (a) $L_a = \lim_{x\to 1^+}(\ln x)^{x-1} =$ "0^0" forma indeterminada.

$L_a = \lim_{x\to 1^+} e^{(x-1)\ln(\ln x)} =$ "$e^{0\cdot\infty}$" forma indeterminada.

$L_a = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(\ln x)}{1/(x-1)}} =$ "$e^{\frac{\infty}{\infty}}$" forma indeterminada, admitindo L'Hôpital. (0.1)

O limite no expoente: $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{\ln(\ln x)}{1/(x-1)} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1^+}\dfrac{1/\ln x\cdot 1/x}{-1/(x-1)^2} =$
$-\lim_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)^2}{\ln x}\underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to 1} =$ "$\dfrac{0}{0}$" forma indeterminada, admitindo L'Hôpital. (0.2)

Sem o fator $\dfrac{1}{x}$ que tende a 1: $-\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)^2}{\ln x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} -\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2(x-1)\cdot 1}{1/x} =$ $-2\lim\limits_{x\to1^+} x(x-1) = 1\cdot 0 = 0.$ (0.3)
Portanto, o limite no expoente é
$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\ln(\ln x)}{1/(x-1)} = -\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)^2}{\ln x}\cdot\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x} = 0\cdot 1 = 0.$ (0.1)
Portanto, $L_a = e^0 = 1.$ (0.1)

(b) $L_b = \lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{1}{e^x-e^2} - \dfrac{1}{x-2}\right) =$ "$-\infty+\infty$", forma indeterminada.
Juntando as frações: $L_b = \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x-2-e^x+e^2}{(x-2)(e^x-e^2)} =$ "$\dfrac{0}{0}$", forma indeterminada, admitindo L'Hôpital. (0.1)
$L_b \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1-e^x}{1(e^x-e^2)+(x-2)e^x} = \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1-e^x}{-e^2+(x-1)e^x}.$ (0.3)
O numerador tende a $1-e^2$ que é negativo. Como $(x-1)e^x < e^2 \forall x < 2$, o denominador tende a zero por números negativos. Logo, $L_b = \infty$. (0.3)

3. (a) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x-1}$

$f'(x) = \dfrac{2x(x-1)-(x^2+4)1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2-2x-x^2-4}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-4}{(x-1)^2}$ (0.2)

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-4)2(x-1)}{(x-1)^4}$$
$$= \frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x-4)2}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{2x^2-2x-2x+2-(2x^2-4x-8)}{(x-1)^3} = \frac{10}{(x-1)^3} \quad (0.3)$$

(b) i. Domínio: A função admite todos os números reais com exeção de $x=1$, i.e., $\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{1\}$. (0.1)

ii. Simetria: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+4}{(-x)-1} = -\dfrac{x^2+4}{x+1}$, Esta expressão não iguala $f(x)$ nem $-f(x)$. Portanto, a função não é par nem ímpar. (0.1)

iii. Intercepto com o eixo y: $f(0) = -4$ (0.1)
Intercepto com o eixo x: Zeros da função, ou seja, zeros do numerador: $x^2+4=0$ Sempre positivo. Não há interceptos. (0.1)

iv. Extremos e monotonia: Pontos críticos: $f'(x) \nexists$ em $x = 1 \notin \mathbb{D}$; (0.1)
$f'(x) = 0$ em $x^2-2x-4=0$, i.e., $x = 1\pm\sqrt{4-(-4)} = 1\pm\sqrt{5}$ (0.1)
Como $f'(-5) = \frac{31}{36} > 0$, temos $f'(x) < 0 \forall x \in (-\infty, 1-\sqrt{5})$.
Portanto, f é crescente neste intervalo. (0.1)
Como $f'(0) = -4 < 0$, temos $f'(x) < 0 \forall x \in (1-\sqrt{5}, 1)$.
Portanto, f é decrescente neste intervalo. (0.1)
Como $f'(x)$ troca de positivo para negativo em $x = 1-\sqrt{5}$, a função possui um máximo relativo neste ponto. (0.1)
Como $f'(2) = -4 < 0$, temos $f'(x) > 0 \forall x \in (1, 1+\sqrt{5})$.
Portanto, f é decrescente neste intervalo. (0.1)
Como $f'(5) = \frac{11}{16} > 0$, temos $f'(x) > 0 \forall x \in (1+\sqrt{5}, \infty)$.
Portanto, f é crescente neste intervalo. (0.1)

Como $f'(x)$ troca de negativo para positivo em $x = 1+\sqrt{5}$, a função possui um mínimo relativo neste ponto. (0.1)

Valor da função nos extremos: $f(1-\sqrt{5}) = \dfrac{(1-\sqrt{5})^2-1}{1-\sqrt{5}-1} = \dfrac{1+5-2\cdot 1\cdot\sqrt{5}-1}{-\sqrt{5}} = \dfrac{5-2\sqrt{5}}{-\sqrt{5}} = 2-\sqrt{5}$ e $f(1+\sqrt{5}) = \dfrac{(1+\sqrt{5})^2-1}{1+\sqrt{5}-1} = \dfrac{1+5+2\cdot 1\cdot\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} = \dfrac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2+\sqrt{5}$.

v. Concavidade e pontos de inflexão: Pontos críticos da derivada:
$f''(x)\nexists$ em $x = 1 \notin \mathbb{D}$ e $f''(x) = 0$ nunca.
Portanto, a função não possui pontos de inflexão. (0.2)
Concavidade: Como $f''(x) > 0 \forall x > 1$, a função é cóncava para cima em $(1,\infty)$. (0.1)
Como $f''(x) < 0 \forall x < 1$, a função é cóncava para baixo em $(-\infty, 1)$. (0.1)

vi. Assíntotas: Como a função é contínua em seu domínio, pode haver uma assíntota vertical somente em $x = 1$. Verficando, temos

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+4}{x-1} = \text{“}\dfrac{5}{0^-}\text{”} = -\infty$ (0.1)

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+4}{x-1} = \text{“}\dfrac{5}{0^+}\text{”} = \infty$ (0.1)

Portanto, a reta $x = 1$ é assíntota vertical da função. (0.1)

Assíntotas horizontais: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+4}{x-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1+4/x^2}{1/x-1/x^2} = \text{“}\dfrac{1}{0^\pm}\text{”} = \pm\infty$

Portanto, a função não tem assíntotas horizontais. (0.1)

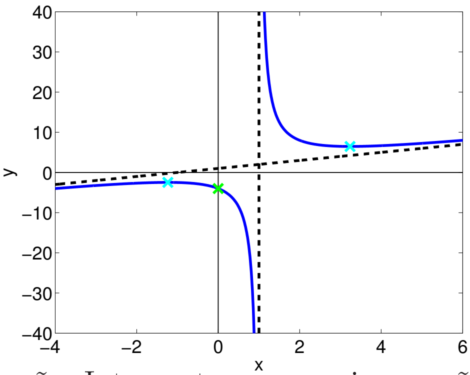
Assíntotas inclinadas:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-2x-4}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-2/x-4/x^2}{1-2/x+1/x^2} = 1 = m$ (0.2)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+4}{x-1} - x\dfrac{x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+4-x^2+x}{x-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} -\dfrac{x+4}{x-1} = -\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1+4/x}{1-1/x} = 1.$ (0.2)

Portanto, a reta $y = x+1$ é assíntota da função quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$. (0.1)

vii. Esboço do gráfico e imagem:



(0.4)

Imagem da função: Interceptos com o eixo x: não há; Interceptos com o eixo y: $\times$; Extremos: $\times$; Assíntotas: Retas pretas tracejadas.
Como visível no esboço do gráfico, a imagem da função é
$\mathbb{V} = \mathbb{R} - (f(1-\sqrt{5}), f(1+\sqrt{5})) = \mathbb{R} - (2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5})$. (0.1)

4. Denotamos as laterais da área impressa no panfleto retangular por a e b.
A área impressa do panfleto será de $a \cdot b = 5000$. (0.1)
Portanto $b = \dfrac{5000}{a}$. (0.1)
A área do papel precisa ter $A = (a + 20 + 20) \cdot (b + 10 + 10)$. (0.3)
Desta forma, temos $A(a) = (a + 40) \cdot \left(\dfrac{5000}{a} + 20\right) = 5000 + 40\dfrac{5000}{a} + 20a + 800 = 20a + 5800 + \dfrac{200000}{a}$. (0.3)
O intervalo para o comprimeto da lateral a é de $\mathbb{D} = (0, \infty)$. (0.1)
Para encontar os pontos críticos desta função temos que derivá-la.
Obtemos $A'(a) = 20 - \dfrac{200000}{a^2}$. (0.2)
Os pontos críticos desta derivada são:
$A'(a) \nexists$ em $x = 0 \notin \mathbb{D}$ (0.2)
e $A'(a) = 0$, ou seja $20 - \dfrac{200000}{a^2} = 0$ acontece em $a^2 = 10000$, i.e., $a = \pm 100$, dos quais somente $a = 100$ se encontra no intervalo $\mathbb{D}$. (0.4)
Em $a = 100$, temos o valor da área $A(100) = 20 \cdot 100 + 5800 + \dfrac{200000}{100} = 2000 + 5800 + 2000 = 9800$ (0.2)
Nas pontas do intervalo, temos que considerar os limites:
$\lim_{a \to 0^+} A(a) = \lim_{a \to 0^+} 20a + 5800 + \dfrac{20000}{a} = 0 + 5800 + \infty = +\infty$ (0.1)
e $\lim_{a \to \infty} A(a) = \lim_{a \to \infty} 20a + 5800 + \dfrac{20000}{a} = \infty + 5800 + 0 = +\infty$. (0.1)
Como o valor $A(100)$ é menor do que estes dois limites, o ponto $a = 100$ representa o mínimo absoluto em $\mathbb{D}$. (0.2)
Concluímos que o menor panfleto retangular que acomoda a área impressa ótima é um retângulo com laterais 140 mm e 70 mm e área de 9800 m^2. (0.2)