Departamento de Matemática - IMECC - Unicamp

MA111- Primeiro Semestre de 2014

$3^{\underline{a}}$ Prova - 26/06/2014 (5^a-Noturno)

Nome: ....

R.A.: .... **Turma:**........

Questão	1	2	3	4	5	Total
Nota						

$1^{\underline{a}}$ Questão (2.0pt). Considere as funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^2e^x$. Determine a área da região R limitada pelos gráficos de f e g no intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

Solução. Quando $-1 \leq x \leq 1$, temos

$$x^2 \leq 1 \Longrightarrow f(x) \geq g(x) \text{...(0.2)}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]dx \\
&= \int_{-1}^{1} [e^x - x^2e^x]dx \text{...(0.5)} \\
&= \int_{-1}^{1} e^x dx - \int_{-1}^{1} \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} \text{...(0.2)} \\
&= e^x\Big|_{-1}^{1} - \left(\underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^x}_{v}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \underbrace{e^x}_{v} \underbrace{2xdx}_{du} \right) \text{...(0.5)} \\
&= e - e^{-1} - \left(e - e^{-1} - 2\int_{-1}^{1} xe^x dx \right) \\
&= 2\int_{-1}^{1} \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} \text{...(0.2)} \\
&= 2 \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{v}\Big|_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} \underbrace{e^x}_{v} \underbrace{dx}_{du} \text{...(0.3)} \\
&= 2e + 2e^{-1} - 2e^x\Big|_{-1}^{1} \\
&= 2e + 2e^{-1} - 2e + 2e^{-1} \;=\; 4e^{-1} \text{...(0.1)}
\end{aligned}$$

2ª Questão (2.0pt). Seja $h(x) = \int_1^{x^8} \cos(7t^5 - t^3)dt$. Encontre $h(1)$ e $h'(x)$.

Solução. Seja $u = x^8$, $u' = 8x^7$, então

$$h(u) = \int_1^{u} \cos(7t^5 - t^3)dt \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(0.2)$$

Note que

$$h(1) = \int_1^{1} \cos(7t^5 - t^3)dt = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(0.5)$$

Para calcular a derivada, utilizando o Teorema Fundamental do Calculo, temos

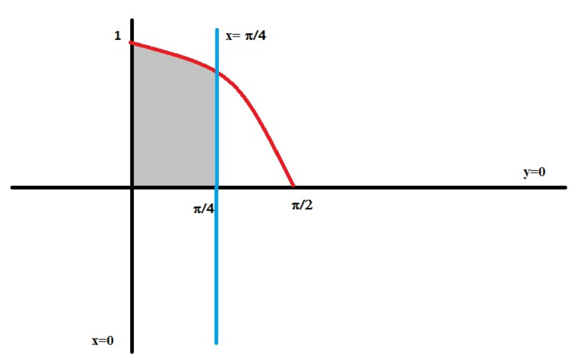
$$\frac{dh}{du}(u) = \cos(7u^5 - u^3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(0.5)$$

Logo, pela regra da cadeia temos,

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx}(x) &= \frac{dh}{du}(u) \cdot \frac{du}{dx}(x) \\ &= \cos(7u^5 - u^3) \cdot 8x^7 \\ &= 8x^7 \cos(7x^{40} - x^{24}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(0.8) \end{aligned}$$

3ª Questão (2.0pt). Considere a região R limitada pelas curvas $y = \cos(x)$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = \pi/4$. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo x.

Solução.



O volume solido gerado ao rotar a região é o mesmo gerado ao rotar a curva $y = \cos(x)$, de $x = 0$ até $x = \pi/4$

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\pi/4} \pi \cos^2(x)dx \text{.......................................}(1.0)\\
&= \pi \int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos(2x)}{2} dx \text{.......................................}(0.3)\\
&= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi/4} dx + \int_0^{\pi/4} \cos(2x)dx\right)\\
&= \frac{\pi}{2}\left(\pi/4 + \frac{1}{2}\sin(2x)\Big|_0^{\pi/4}\right) \text{.......................................}(0.5)\\
&= \frac{\pi}{2}\left(\pi/4 + \frac{1}{2}\right) \text{.......................................}(0.2)
\end{aligned}
$$

4ª Questão. Calcule as seguintes integrais:

(a) (1.5pt) $\int sen^7(x)cos^5(x)dx$;

Solução.

$$
\begin{aligned}
\int \sin^7(x)\cos^5(x)dx &= \int \sin^7(x)\cos^4(x)\cdot \underbrace{\cos(x)dx}_{d\sin x} \text{.......................................}(0.4)\\
&= \int \sin^7(x)\left(1-\sin^2 x\right)^2 \cdot d(\sin x) \text{.......................................}(0.2)
\end{aligned}
$$

Fazendo a substituição $u = \sin x$, obtemos.......................................(0.2)

$$
\begin{aligned}
\int \sin^7(x)\cos^5(x)dx &= \int u^7\left(1-u^2\right)^2 du \text{.......................................}(0.2)\\
&= \int u^7\left(1-2u^2+u^4\right) du\\
&= \int \left(u^7-2u^9+u^{11}\right) du\\
&= \frac{u^8}{8} - \frac{u^{10}}{5} + \frac{u^{12}}{12} + C \text{.......................................}(0.2)
\end{aligned}
$$

Finalmente voltando na nossa variavel original x, concluimos

$$
\int \sin^7(x)\cos^5(x)dx = \frac{\sin^8(x)}{8} - \frac{\sin^{10}(x)}{5} + \frac{\sin^{12}(x)}{12} + C \text{.......................................}(0.3)
$$

(b) (1.5pt) $\displaystyle\int \frac{5x-3}{x^3-2x^2+x}dx.$

Solução. Note que

$$x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2 \text{...(0.1)}$$

temos assim, um fator linear x e um fator linear repetido $x-1$,...(0.1) por tanto escrevemos

$$\begin{aligned} \frac{5x-3}{x^3-2x^2+x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \text{...(0.3)} \\ &= \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} \end{aligned}$$

igualando numeradores,

$$\begin{aligned} 5x-3 &= A(x^2-2x+1) + Bx^2 - Bx + Cx \\ &= Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx \\ &= (A+B)x^2 + (C-2A-B)x + A \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ C-2A-B &= 5 \\ A &= -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A &= -3 \\ B &= 3 \\ C &= 2 \end{cases} \quad \text{...(0.4)}$$

Desta maneira, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-3}{x^3-2x^2+x}dx &= \int \left(\frac{-3}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} \right) dx \\ &= -3\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} \text{...(0.3)} \\ &= -3\ln x + 3\ln(x-1) - 2\frac{1}{x-1} + C \text{...(0.3)} \\ &= 3\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - \frac{2}{x-1} + C \end{aligned}$$

5ª Questão. (1.0pt). Avalie a seguinte integral imprópria, encontrando o seu valor caso convirja:

$$\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{1/3}}dx.$$

Solução. Note que esta é uma integral impropria do tipo II, dado que o integrando é descontínuo no ponto 2, o qual é o extremo do intervalo de integração $[2, 3]$.........................(0.2)
Então

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{1/3}} dx &= \lim_{t\to 2^+} \int_t^3 \frac{1}{(x-2)^{1/3}} dx \text{...(0.1)} \\
&= \lim_{t\to 2^+} \int_t^3 (x-2)^{-1/3} dx \\
&= \lim_{t\to 2^+} \frac{1}{-1/3+1} (x-2)^{-1/3+1} \Big|_t^3 \text{...(0.3)} \\
&= \frac{3}{2} \lim_{t\to 2^+} (x-2)^{2/3} \Big|_t^3 \\
&= \frac{3}{2} \lim_{t\to 2^+} \left[1-(t-2)^{2/3}\right] \text{...(0.2)} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Assim, a integral é convergente e seu valor é $\frac{3}{2}$...(0.2)