Solução da Prova III (quinta-feira)

(Cada setinha ($\checkmark$) vale 0.1)

1. Definindo a função $g(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{2t}{\operatorname{arcsen}^3 t}\,dt\checkmark$, temos que $f(x) = g(\operatorname{sen} 5x)\checkmark - g(\operatorname{sen} x)\checkmark$. Portanto, pela regra da cadeia, temos $f'(x) = g'(\operatorname{sen} 5x)\checkmark \cdot \cos 5x\checkmark \cdot 5\checkmark - g'(\operatorname{sen} x)\checkmark \cos x\checkmark$, onde, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,$\checkmark g'(x) = \dfrac{2x\checkmark}{\operatorname{arcsen}^3 x\checkmark}$. Portanto,
$$f'(x) = \frac{10 \operatorname{sen} 5x}{\operatorname{arcsen}^3(\operatorname{sen} 5x)} \cos 5x\checkmark - \frac{2 \operatorname{sen} x}{\operatorname{arcsen}^3(\operatorname{sen} x)} \cos x\checkmark$$
$$= \frac{10 \operatorname{sen} 5x \cos 5x}{(5x)^3} - \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{x^3}\checkmark = \frac{1}{25x^3}(\operatorname{sen} 10x - 25 \operatorname{sen} 2x)\checkmark. \qquad (1.5)$$

2a. $I = \displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{12-5x^3}}\,dx$. Substituição: $u = 12 - 5x^3\checkmark \Rightarrow u' = -15x^2\checkmark \Rightarrow du = -15x^2dx\checkmark$, ou seja, $x^2dx = -\frac{1}{15}du\checkmark$. Assim, temos $I = -\dfrac{1}{15}\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du\checkmark = -\frac{1}{15}\int u^{-1/2}\,du\checkmark =$
$$-\frac{1}{15}\frac{u^{1/2}}{1/2}\checkmark + C\checkmark = -\frac{2}{15}\sqrt{u} + C\checkmark = -\frac{2}{15}\sqrt{12-5x^2} + C\checkmark. \qquad (1.0)$$

2b. $I = \displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x \cos^4 x\,dx = \int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \operatorname{sen} x\,dx\checkmark$. Substituição: $u = \cos x\checkmark \Rightarrow du = -\operatorname{sen} x dx\checkmark$ fornece $I = -\displaystyle\int u^4(1-u^2)^2du\checkmark = -\int (u^4 - 2u^6 + u^8)du\checkmark = -\frac{u^5}{5}\checkmark + \frac{2u^7}{7}\checkmark -$
$$\frac{u^9}{9}\checkmark + C\checkmark = -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{7}\cos^7 x - \frac{1}{9}\cos^9 x + C\checkmark. \qquad (1.0)$$

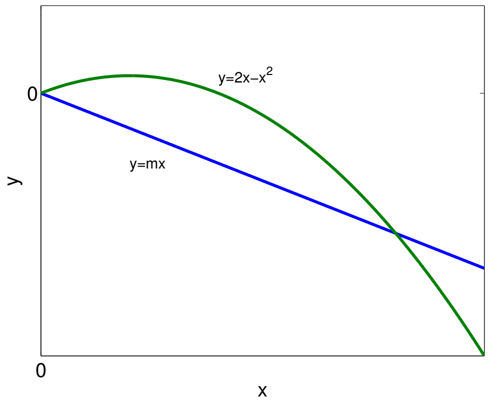
2c. $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{16-9x^2}}{x^2}\,dx$. Substituição trigonométrica: $x = \frac{4}{3}\operatorname{sen} u\checkmark \Rightarrow dx = \frac{4}{3}\cos u\,du\checkmark$ e $\sqrt{16-9x^2} = 4\cos u\checkmark$. Isso fornece $I = \displaystyle\int \frac{4\cos u}{\left(\frac{4}{3}\operatorname{sen} u\right)^2}\frac{4}{3}\cos u\,du\checkmark = 3\int \cot^2 u\,du\checkmark =$
$$3\int\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} - 1\right)du\checkmark = -3\cot u\checkmark - 3u + C\checkmark = -3\cot(\operatorname{arcsen}(\frac{3x}{4})) - 3\operatorname{arcsen}(\frac{3x}{4}) + C\checkmark =$$
$$-3\sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen}(\frac{3x}{4}))} - 1} - 3\operatorname{arcsen}(\frac{3x}{4}) + C = -3\sqrt{(\frac{4}{3x})^2 - 1} - 3\operatorname{arcsen}(\frac{3x}{4}) + C =$$
$$-\frac{\sqrt{16-9x^2}}{x} - 3\operatorname{arcsen}(\frac{3x}{4}) + C\checkmark. \qquad (1.0)$$

3. $I = \displaystyle\int \frac{6x-1}{(x^2-2x+5)(x+2)}\,dx$. Integral de função racional $\Rightarrow$ Frações parciais:
$$\frac{6x-1}{(x^2-2x+5)(x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+5}\checkmark + \frac{C}{x+2}\checkmark = \frac{(Ax+B)(x+2) + C(x^2-2x+5)}{(x^2-2x+5)(x+2)} \Rightarrow$$
$6x - 1 = (Ax+B)(x+2) + C(x^2-2x+5) = (A+C)x^2 + (2A+B-2C)x + 2B + 5C\checkmark$.
Estas expressões precisam ser iguais para todo x. Isto fornece três equações:
Em $x = -2$: $6(-2) - 1 = 0 + C((-2)^2 - 2(-2) + 5) = 13C\checkmark \Rightarrow C = -1\checkmark$.
Em $x = 0$: $-1 = 2B + 5C\checkmark = 2B - 5 \Rightarrow B = 2\checkmark$.
Coeficiente de x^2: $0 = A + C\checkmark = A - 1 \Rightarrow A = 1\checkmark$.
Portanto, $I = \underbrace{\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-2x+5}\,dx}_{I_1} - \underbrace{\displaystyle\int \frac{1}{x+2}\,dx}_{I_2}\checkmark$. (1.0)

Na primeira integral I_1, o termo linear do numerador precisa ser modificado de modo a representar a derivada do denominador.
Como $(x^2-2x+5)' = 2x-2$, podemos escrever $x+2 = \frac{1}{2}(2x-2)+3\checkmark$.
Assim, $I_1 = \dfrac{1}{2}\underbrace{\displaystyle\int \frac{2x+2}{x^2-2x+5}\,dx}_{I_{11}} + 3\underbrace{\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx}_{I_{12}}\checkmark$.
A primeira destas integrais, I_{11}, fornece $I_{11} = \ln(x^2-2x+5)\checkmark + C_{11}$.
Na segunda destas integrais, I_{12}, rescrevemos o denominador, completando o quadrado de acordo com $x^2-2x+5 = x^2-2\cdot 1\cdot x+1+4 = (x-1)^2+4\checkmark = 4\left[\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2+1\right]\checkmark$.
Assim, substituição: $u = \dfrac{x-1}{2}\checkmark \Rightarrow du = \dfrac{1}{2}dx\checkmark$ fornece:
$I_{12} = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int \frac{1}{u^2+1}2\,du\checkmark = \frac{1}{2}\arctan u\checkmark + C_{12} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2}\checkmark + C_{12}.$ (1.0)
Portanto, $I_1 = \dfrac{1}{2}I_{11} + 3I_{12} = \dfrac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) + \dfrac{3}{2}\arctan\dfrac{x-1}{2} + C_1\checkmark$.
A integral I_2 é pode ser facilmente integrada, resultando em $I_2 = \ln|x+2|\checkmark + C_2$.
Desta forma, obtemos
$I = I_1 - I_2 = \dfrac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) + \dfrac{3}{2}\arctan\dfrac{x-1}{2} - \ln|x+2| + C\checkmark$.
Assim, a integral determinada é $\displaystyle\int_1^3 \frac{6x-1}{(x^2-2x+5)(x+2)}\,dx = \left.\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5) + \frac{3}{2}\arctan\frac{x-1}{2} - \ln|x+2|\right|_1^3 \checkmark = \frac{1}{2}\ln(3^2-2\cdot 3+5) + \frac{3}{2}\arctan\frac{3-1}{2} - \ln|3+2| - \left(\frac{1}{2}\ln(1^2-2\cdot 1+5) + \frac{3}{2}\arctan\frac{1-1}{2} - \ln|1+2|\right) = \frac{1}{2}\ln 8 + \frac{3}{2}\arctan 1 - \ln 5 - \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{3}{2}\arctan 0 + \ln 3 = \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}\ln 2 + \ln(3/5)\checkmark.$ (0.5)

(2.5)

4. Os gráficos de $f(x) = mx$ e $g(x) = 2x - x^2$ se interceptam em $mx = 2x - x^2\checkmark$, i.e., $x^2 + (m-2)x = 0\checkmark$, ou seja, $x = 0$ e $x = 2-m\checkmark$. Como $f(x) < g(x)\checkmark$neste intervalo, temos (caso $2-m>0$)



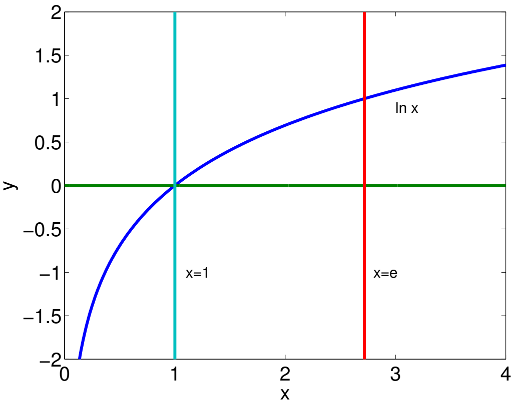
$$A = \int_0^{2-m}\checkmark \left(2x - x^2 - mx\right)\,dx\checkmark$$
$$= \int_0^{2-m} (-x^2 + (2-m)x)\,dx\checkmark$$
$$= \left.\left(-\frac{x^3}{3}\checkmark + \frac{2-m}{2}x^2\checkmark\right)\right|_0^{2-m}\checkmark$$
$$= \left(-\frac{1}{3}(2-m)^3 + \frac{2-m}{2}(2-m)^2\right) - 0\checkmark$$
$$= \frac{1}{6}(2-m)^3\checkmark\text{u.a.}$$

Precisamos então $\dfrac{1}{6}(2-m)^3 = 36\checkmark$, ou seja, $(2-m)^3 = 6\cdot 36\checkmark$.
Tirando a raíz cúbica, obtemos $(2-m) = 6 \Rightarrow m = -4\checkmark$.
Alternativa (caso $2-m<0$): $A = \displaystyle\int_{2-m}^{0}\checkmark \left(2x - x^2 - mx\right)\,dx\checkmark$
$$= \int_{2-m}^{0} (-x^2 + (2-m)x)\,dx\checkmark$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3}\checkmark + \frac{2-m}{2}x^2\checkmark\right)\Bigg|_{2-m}^{0} \checkmark$$
$$= 0 - \left(-\frac{1}{3}(2-m)^3 + \frac{2-m}{2}(2-m)^2\right)\checkmark$$
$= -\frac{1}{6}(2-m)^3\checkmark$u.a. Precisamos então $\frac{1}{6}(2-m)^3 = 36\checkmark$, ou seja, $(2-m)^3 = -6 \cdot 36\checkmark$. Tirando a raíz cúbica, obtemos $(2-m) = -6 \Rightarrow m = 8\checkmark$.

(1.5)

5. Volume: Cascas cilíndricas: Integração ao longo do eixo x de funções rotacionadas em torno do eixo y: $V = 2\pi \int_a^b r[f(x) - g(x)]\,dx\checkmark$, onde a e b são os limites de integração, aqui $x = 1\checkmark$ e $x = e\checkmark$, e onde $f(x)$ e $g(x)$ são as funções que delimitam a área, aqui $f(x) = \ln x\checkmark$ e $g(x) = 0\checkmark$. O raio r de rotação é dado pela distância ao eixo de rotação, i.e., temos $r = x\checkmark$. Assim, $V = 2\pi \int_1^e x[\ln(x) - 0]\,dx\checkmark$.



A integração se dá por partes, com $f = \ln x \Rightarrow f' = \frac{1}{x}\checkmark$e $g' = x \Rightarrow g = \frac{x^2}{2}\checkmark$. Assim, $V = 2\pi\left[\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e \checkmark - \int_1^e \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\,dx\checkmark\right] = 2\pi\left[\frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1^2}{2}\ln 1\checkmark - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx\right]\checkmark = 2\pi\left[\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_1^e\checkmark\right] = \pi\left[e^2 - \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2}\left(e^2+1\right)\checkmark$. (1.5)