Solução da Prova III (sexta-feira)

(Cada setinha ($\checkmark$) vale 0.1)

1. Definindo a função $g(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{\arccos^2 u}{(1-u^2)^2}\,du\checkmark$, temos que $f(x) = g(\cos 3x)\checkmark - g(\cos x)\checkmark$. Portanto, pela regra da cadeia, temos $f'(x) = g'(\cos 3x)\checkmark \cdot (-\operatorname{sen} 3x)\checkmark \cdot 3\checkmark - g'(\cos x)\checkmark(-\operatorname{sen} x)\checkmark$, onde, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,$\checkmark g'(x) = \dfrac{\arccos^2 x\checkmark}{(1-x^2)^2\checkmark}$. Portanto,
$$f'(x) = -3\frac{\arccos^2(\cos 3x)}{(1-\cos^2 3x)^2}\operatorname{sen} 3x\checkmark + \frac{\arccos^5(\cos x)}{(1-\cos^2 x)^2}\operatorname{sen} x\checkmark$$
$$= -3\frac{(3x)^2 \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen}^4 3x} + \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^4 x}\checkmark = x^2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x} - \frac{27}{\operatorname{sen}^3 3x}\right)\checkmark. \qquad (1.5)$$

2a. $I = \displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{3x^3+8}}\,dx$. Substituição: $u = 3x^3+8\checkmark \Rightarrow u' = 9x^2\checkmark \Rightarrow du = 9x^2dx\checkmark$, ou seja, $x^2dx = \frac{1}{9}du\checkmark$. Assim, temos $I = \dfrac{1}{9}\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du\checkmark = \frac{1}{9}\int u^{-1/2}\,du\checkmark = \frac{1}{9}\frac{u^{1/2}}{1/2}\checkmark + C\checkmark = \frac{2}{9}\sqrt{u} + C\checkmark = \frac{2}{9}\sqrt{3x^3+8} + C\checkmark$. (1.0)

2b. $I = \displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x \cos^5 x\,dx = \int \operatorname{sen}^4 x\cos^4 x \cos x\,dx\checkmark$. Substituição: $u = \operatorname{sen} x\checkmark \Rightarrow du = \cos x dx\checkmark$ fornece $I = \displaystyle\int u^4(1-u^2)^2du\checkmark = \int (u^4-2u^6+u^8)du\checkmark = \frac{u^5}{5}\checkmark - \frac{2u^7}{7}\checkmark + \frac{u^9}{9}\checkmark + C\checkmark = \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x - \frac{2}{7}\operatorname{sen}^7 x + \frac{1}{9}\operatorname{sen}^9 x + C\checkmark$. (1.0)

2c. $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{9-16x^2}}{x^2}\,dx$. Substituição trigonométrica: $x = \frac{3}{4}\operatorname{sen} u\checkmark \Rightarrow dx = \frac{3}{4}\cos u\,du\checkmark$ e $\sqrt{9-16x^2} = 3\cos u\checkmark$. Isso fornece $I = \displaystyle\int \frac{3\cos u}{\left(\frac{3}{4}\operatorname{sen} u\right)^2}\frac{3}{4}\cos u\,du\checkmark = 4\int \cot^2 u\,du\checkmark = 4\int\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} - 1\right)du\checkmark = -4\cot u\checkmark - 4u + C\checkmark = -4\cot(\operatorname{arcsen}(\frac{4x}{3})) - 4\operatorname{arcsen}(\frac{4x}{3}) + C\checkmark = -4\sqrt{\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen}(\frac{4x}{3}))} - 1} - 4\operatorname{arcsen}(\frac{4x}{3}) + C = -4\sqrt{(\frac{3}{4x})^2 - 1} - 4\operatorname{arcsen}(\frac{3x}{4}) + C = -\frac{\sqrt{9-16x^2}}{x} - 4\operatorname{arcsen}(\frac{3x}{4}) + C\checkmark$. (1.0)

3. $I = \displaystyle\int \frac{8x+5}{(x^2+4x+8)(x-1)}\,dx$. Integral de função racional $\Rightarrow$ Frações parciais:
$$\frac{8x+5}{(x^2+4x+8)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+4x+8}\checkmark + \frac{C}{x-1}\checkmark = \frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+4x+8)}{(x^2+4x+8)(x-1)} \Rightarrow$$
$8x+5 = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+4x+8) = (A+C)x^2 + (-A+B+4C)x - B + 8C\checkmark$.
Estas expressões precisam ser iguais para todo x. Isto fornece três equações:
Em $x=1$: $8\cdot 1 + 5 = 0 + C(1^2 + 4\cdot 1 + 8) = 13C\checkmark \Rightarrow C = 1\checkmark$.
Em $x=0$: $5 = -B + 8C\checkmark = -B + 8 \Rightarrow B = 3\checkmark$.
Coeficiente de x^2: $0 = A + C\checkmark = A + 1 \Rightarrow A = -1\checkmark$.

Portanto, $I = \underbrace{\int \frac{-x+3}{x^2+4x+8}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{1}{x-1}\,dx}_{I_2} \checkmark.$ (1.0)

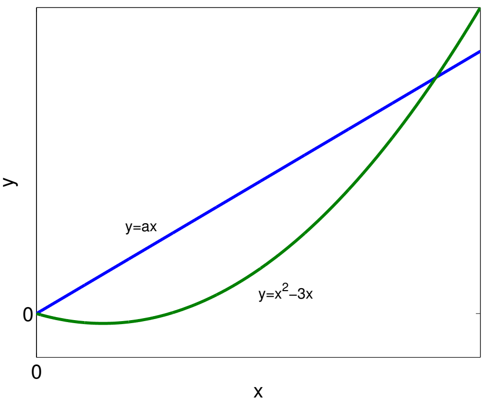
Na primeira integral I_1, o termo linear do numerador precisa ser modificado de modo a representar a derivada do denominador.
Como $(x^2+4x+8)' = 2x+4$, podemos escrever $-x+3 = -\frac{1}{2}(2x+4)+5\checkmark$.
Assim, $I_1 = -\frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}\,dx}_{I_{11}} + 5\underbrace{\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx}_{I_{12}} \checkmark.$
A primeira destas integrais, I_{11}, fornece $I_{11} = \ln(x^2+4x+8)\checkmark + C_{11}$.
Na segunda destas integrais, I_{12}, rescrevemos o denominador, completando o quadrado de acordo com $x^2+4x+8 = x^2+2\cdot 2\cdot x+2^2+4 = (x+2)^2+4\checkmark = 4\left[\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1\right]\checkmark$.
Assim, substituição: $u = \frac{x+2}{2}\checkmark \Rightarrow du = \frac{1}{2}dx\checkmark$ fornece:

$I_{12} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1}2\,du\checkmark = \frac{1}{2}\arctan u\checkmark + C_{12} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+2}{2}\checkmark + C_{12}.$ (1.0)

Portanto, $I_1 = -\frac{1}{2}I_{11} + 5I_{12} = -\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+8) + \frac{5}{2}\arctan\frac{x+2}{2} + C_1\checkmark$.
A integral I_2 é pode ser facilmente integrada, resultando em $I_2 = \ln|x-1|\checkmark + C_2$.
Desta forma, obtemos
$I = I_1 + I_2 = -\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+8) + \frac{5}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + \ln|x-1| + C\checkmark$.
Assim, a integral determinada é $\int_{-2}^{0} \frac{8x+5}{(x^2+4x+8)(x-1)}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+8) + \frac{5}{2}\arctan\frac{x+2}{2} + \ln|x-1|\Big|_{-2}^{0}\checkmark = -\frac{1}{2}\ln(0^2+4\cdot 0+8) + \frac{5}{2}\arctan\frac{0+2}{2} + \ln|0-1| - \left(-\frac{1}{2}\ln[(-2)^2+4(-2)+8] + \frac{5}{2}\arctan\frac{-2+2}{2} + \ln|-2-1|\right) = -\frac{1}{2}\ln 8 + \frac{5}{2}\arctan 1 + \ln 1 + \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{5}{2}\arctan 0 - \ln 3 = \frac{5}{8}\pi - \frac{1}{2}\ln 2 - \ln 3\checkmark.$ (0.5)

(2.5)

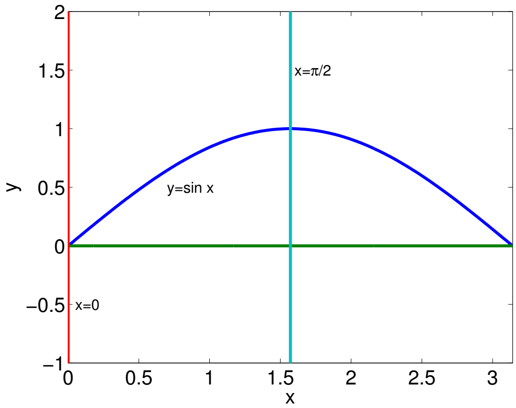
4. Os gráficos de $f(x) = ax$ e $g(x) = x^2-3x$ se interceptam em $ax = x^2-3x\checkmark$, i.e., $x^2+(a+3)x = 0\checkmark$, ou seja, $x=0$ e $x=a+3\checkmark$. Como $g(x) < f(x)\checkmark$neste intervalo, temos $A = \int_0^{a+3}\checkmark\left(ax-(x^2-3x)\right)\,dx\checkmark$



$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{a+3}(-x^2+(a+3)x)\,dx\checkmark\\
&= \left(-\frac{x^3}{3}\checkmark + \frac{a+3}{2}x^2\checkmark\right)\Big|_0^{a+3}\checkmark\\
&= \left(-\frac{1}{3}(a+3)^3 + \frac{a+3}{2}(a+3)^2\right) - 0\checkmark\\
&= \frac{1}{6}(a+3)^3\checkmark\text{u.a.}
\end{aligned}
$$

Precisamos então $\frac{1}{6}(a+3)^3 = 36\checkmark$, ou seja, $(a+3)^3 = 6\cdot 36\checkmark$.
Tirando a raíz cúbica, obtemos $(a+3) = 6 \Rightarrow a = 3\checkmark$. (1.5)

5. Volume: Cascas cilíndricas: Integração ao longo do eixo x de funções rotacionadas em torno do eixo y: $V = 2\pi\int_a^b r[f(x) - g(x)]\,dx$✓, onde a e b são os limites de integração, aqui $x = 0$✓ e $x = \frac{\pi}{2}$✓, e onde $f(x)$ e $g(x)$ são as funções que delimitam a área, aqui $f(x) = \operatorname{sen} x$✓ e $g(x) = 0$✓. O raio r de rotação é dado pela distância ao eixo de rotação, i.e., temos $r = x$✓.



Assim, $V = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x[\operatorname{sen}(x) - 0]\,dx$✓.

Integração por partes, com $f = x \Rightarrow f' = 1$✓e $g' = \operatorname{sen} x \Rightarrow g = -\cos x$✓. Assim, $V = 2\pi\left[-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}✓ - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1(-\cos x)\,dx✓\right] = 2\pi\left[-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - 0\cos 0✓ + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\,dx✓\right] = 2\pi\left[0 + \operatorname{sen} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}✓\right] = 2\pi(1 - 0) = 2\pi$✓. (1.5)