Solução do Exame

1. (a) $\displaystyle\lim_{y\to 0^+}\frac{\ln(y^2+2y)}{\ln y} = \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}\checkmark \overset{\text{L'H}}{=} \checkmark \lim_{y\to 0^+}\frac{\frac{2y+2\checkmark}{y^2+2y\checkmark}}{\frac{1}{y}\checkmark} = \lim_{y\to 0^+}\frac{2y+2}{y+2}\checkmark = 1\checkmark$ (0.7)

   (b) $\displaystyle g'(x) = \frac{-e^x\checkmark(1+e^x)\checkmark - \checkmark(1-e^x)\checkmark e^x\checkmark}{(1+e^x)^2\checkmark} = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}\checkmark$ (0.7)

   (c) $\displaystyle f'(x) = -\operatorname{sen}(\ln x)\checkmark\left(\frac{1}{x}\right)\checkmark + \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\checkmark\,\frac{1}{2\sqrt{x}}\checkmark + 2\checkmark + 0\checkmark$

   $\displaystyle = -\frac{1}{x}\operatorname{sen}(\ln x) + \frac{1/(2\sqrt{x})}{1+x} + 2\checkmark$ (0.7)

2. (a) Fazendo $u = \ln x\checkmark$ e $dv = dx\checkmark$, temos $du = dx/x\checkmark$ e $v = x\checkmark$. Logo, aplicando integração por partes:

   $\displaystyle\int_1^e \ln x\; dx = x\ln x|_1^e\checkmark - \int_1^e x\frac{1}{x}dx\checkmark = e - x|_1^e = e - e + 1 = 1\checkmark$ (0.7)

   (b) Primeiro vamos calcular a seguinte integral indefinida por partes (fazendo $u = x$ e $dv = e^{-x}dx$, temos $du = dx$ e $v = -e^{-x}\checkmark$). Assim:

   $\displaystyle\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx\checkmark = -xe^{-x} - e^{-x} + C\checkmark$. Logo,

   $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x}dx\checkmark = \lim_{b\to\infty}\left(-be^{-b} - e^{-b} + 1\right)\checkmark = \lim_{b\to\infty}(-be^{-b}) + 1$

   $\displaystyle = \lim_{b\to\infty}\frac{-b}{e^b} + 1\checkmark \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{b\to\infty}\frac{-1}{e^b} + 1 = 1\checkmark.$ (0.7)

   (c) Usando integração trigonométrica com $x = \tan\theta\checkmark$, temos $x^2+1 = \sec^2\theta\checkmark$ e $dx = \sec^2\theta d\theta\checkmark$. Assim: $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \int\frac{\sec^2\theta}{(\sec^2\theta)^{3/2}}d\theta\checkmark = \int\frac{1}{\sec\theta}d\theta = \int\cos\theta d\theta =$ $\displaystyle\operatorname{sen}\theta\checkmark + c\checkmark = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} + c = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c\checkmark$ (0.7)

3. Derivando a equação $y^2(2-x) = x^3$, implicitamente, temos:

   $\displaystyle 2y\checkmark y'\checkmark(2-x)\checkmark + y^2\checkmark(-1)\checkmark = 3x^2\checkmark \Rightarrow 2yy'(2-x) = 3x^2 + y^2 \Rightarrow y' = \frac{3x^2+y^2}{2y(2-x)}\checkmark.$

   Calculando y' no ponto (1,1), temos:

   $$y'|_{(1,1)}\checkmark = \frac{3+1}{2(2-1)}\checkmark = 2\checkmark$$

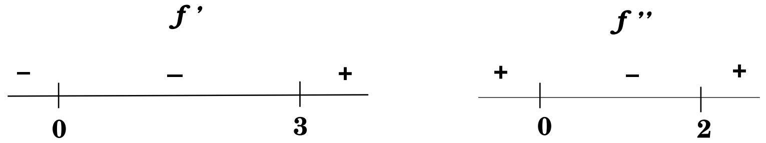
   Então a reta tangente a curva no ponto (1,1) é

   $$\frac{y-1\checkmark}{x-1\checkmark} = 2\checkmark \Rightarrow y = 2x - 1\checkmark. \qquad (1.4)$$

4. $f(x) = x^4 - 4x^3$

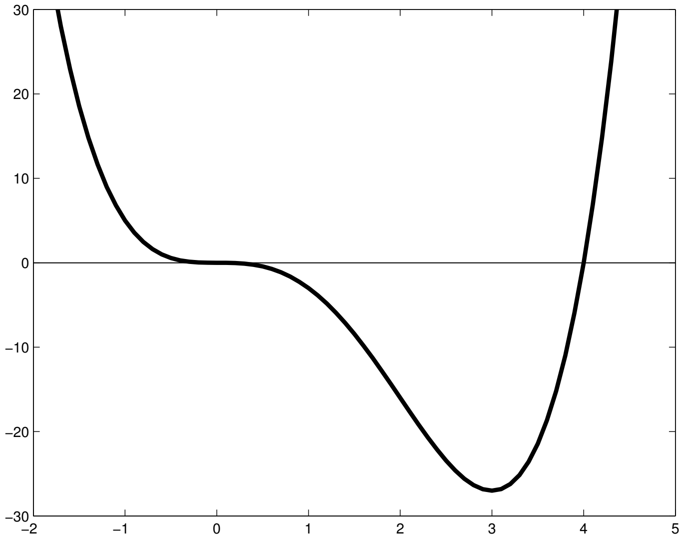
   (a) (i) Domínio: $\mathbb{D} = \mathbb{R}\checkmark$. (ii) Interceptos: $f(0) = 0$ e $f(x) = x^4 - 4x^3 = 0$ em $x = 0$ e $x = 4\checkmark$.

(b) Para encontrarmos os extremos, devemos calcular os pontos críticos, i.e., onde a derivada é nula ou não existe. Para tal, derivamos a função f, isto é, $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \checkmark = 4x^2(x-3)$. A derivada existe para todo $x \in I\!R$, logo os pontos críticos sãoaqueles onde $f'(x) = 0 \checkmark$, ou seja $x = 0$ e $x = 3 \checkmark$. Agora, vamos ver onde a função é crescente ou decrescente. Para isto, vamos analisar o sinal de $f'(x)$: $f'(x) < 0$ para valores nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, 3) \checkmark$, o que implica que f é decrescente nestes intervalos$\checkmark$. Agora, para valores no intervalo $(3, \infty) \checkmark$, temos que $f'(x) > 0$. Portanto, f é crescente neste intervalo$\checkmark$. Além disso, como em $x = 0$, temos que f' não muda de sinal, então $(0, f(0))$ não é máximo nem mínimo. Mas em $x = 3$, temos que f' vai de negativo para positivo$\checkmark$. Logo, $(3, f(3)) = (3, -27)$ é um ponto de mínimo local$\checkmark$.



(c) Possíveis pontos de inflexão: $f''(x) = 0 \checkmark$. Temos que $f''(x) = 12x^2 - 24x \checkmark = 12x(x-2)$, então $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2 \checkmark$. Logo, estes dois valores são os possíveis pontos de inflexão. Vamos analisar o sinal de $f''(x)$: Temos que $f''(x) > 0$ para valores nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(2, \infty) \checkmark$ e $f''(x) < 0$ para valores no intervalo $(0, 2) \checkmark$. Portanto, f tem concavidade para cima em $(-\infty, 0)$ e $(2, \infty) \checkmark$ e tem concavidade voltada para baixo em (0,2)$\checkmark$. Além disso, f'' troca de sinal em $x = 0$ e $x = 2 \checkmark$. Portanto, temos que $(0, f(0)) = (0, 0)$ e $(2, f(2)) = (2, -16)$ são pontos de inflexão$\checkmark$.

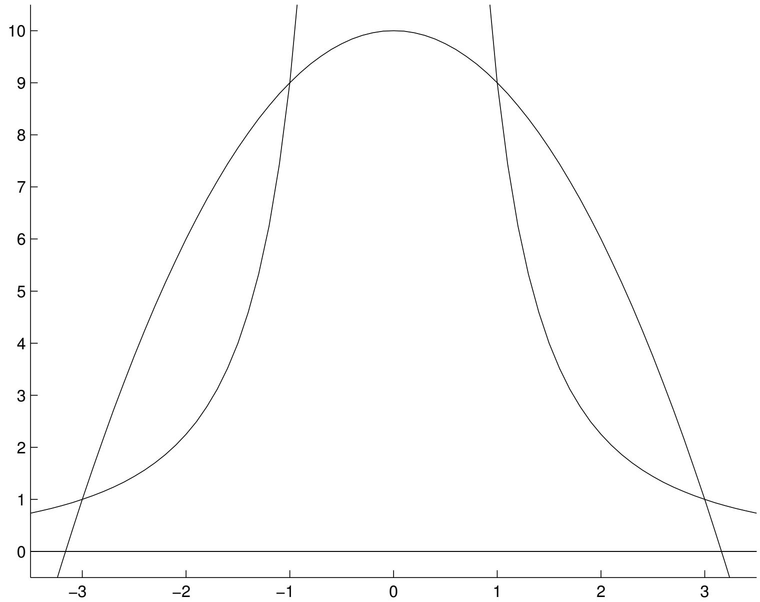
(d) O gráfico é



Ponto de inflexão em $x = 0 \checkmark$, ponto de inflexão em $x = 2 \checkmark$, mínimo em $x = 3 \checkmark$, tangente horizontal em $x = 0 \checkmark$.

5. Inicialmente, vamos igualar $f(x) = g(x)$ para obtermos os pontos de interseção, isto é, $-x^2 + 10 = \frac{9}{x^2} \checkmark$, o que nos leva a seguinte equação $x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \checkmark$, que pode ser escrita como $(x^2 - 9) \checkmark (x^2 - 1) \checkmark = 0$. Resolvendo essa equação temos os seguintes valores: $x = -3 \checkmark, x = 3 \checkmark, x = -1 \checkmark$ e $x = 1 \checkmark$. Daí, observando que essa a área que queremos é o dobro da área$\checkmark$ que pode ser obtida pela integral (veja Figura)

$$A_1 = \int_{1\checkmark}^{3\checkmark} \left(-x^2 + 10 - \frac{9}{x^2} \right) \checkmark \, dx = \left(-\frac{x^3}{3} \checkmark + 10x \checkmark + \frac{9}{x} \checkmark \right) \Bigg|_1^3 .$$



Temos que

$$A_1 = \left(-\frac{27}{3} + 30 + 3\right) \checkmark - \left(-\frac{1}{3} + 10 + 9\right) \checkmark = \frac{16}{3} \checkmark$$

Logo, a área pedida é $A = 2 * A_1 \checkmark = 32/3 \checkmark$.