1. Determine todos os valores de x para os quais

$$\left|\frac{2x-3}{4x+1}\right| < 4 \ . \qquad (2.0)$$

Solução: O argumento da função módulo troca o seu sinal nos pontos $x = -1/4$ e $x = 3/2$. Em $x = -1/4$, a expressão não existe. (0.2)

(i) $x < -1/4$: $2x - 3 < 0$ e $4x + 1 < 0 \ \Rightarrow \ \dfrac{2x-3}{4x+1} > 0$. Portanto, a equação é:

$$\frac{2x-3}{4x+1} < 4 \ . \qquad (0.2)$$

Multiplicação por $4x + 1 < 0$ fornece

$$2x - 3 > 4(4x + 1) = 16x + 4 \ ,$$

ou seja,

$$-7 > 14x \ \Rightarrow x < -1/2 \ . \qquad (0.1)$$

Como todos os passos acima são reversíveis,
$S_1 = \{x|x < -1/4\} \cap \{x|x < -1/2\} = \{x|x < -1/2\}$. (0.2)

(ii) $-1/4 < x < 3/2$: $2x - 3 < 0$ e $4x + 1 > 0 \ \Rightarrow \ \dfrac{2x-3}{4x+1} < 0$. Portanto, a equação é:

$$-\frac{2x-3}{4x+1} < 4 \ . \qquad (0.2)$$

Multiplicação por $4x + 1 > 0$ fornece

$$-2x + 3 < 4(4x + 1) = 16x + 4 \ ,$$

ou seja,

$$-1 < 18x \ \Rightarrow x > -1/18 \ . \qquad (0.1)$$

Como todos os passos acima são reversíveis,
$S_2 = \{x| -1/4 < x < 3/2\} \cap \{x|x > -1/18\} = \{x| -1/18 < x < 3/2\}$. (0.2)

(iii) $x \geq 3/2$: $2x - 3 > 0$ e $4x + 1 > 0 \ \Rightarrow \ \dfrac{2x-3}{4x+1} > 0$. Portanto, a equação é:

$$\frac{2x-3}{4x+1} < 4 \ . \qquad (0.2)$$

Multiplicação por $4x + 1 > 0$ fornece

$$2x - 3 < 4(4x + 1) = 16x + 4 \ ,$$

ou seja,

$$-7 < 14x \ \Rightarrow x > -1/2 \ . \qquad (0.1)$$

Como todos os passos acima são reversíveis,
$S_3 = \{x|x \geq 3/2\} \cap \{x|x > -1/2\} = \{x|x \geq 3/2\}$. (0.2)

Portanto, a solução total é $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x|x < -1/2\} \cup \{x|x > -1/18\}$. (0.3)

2. Encontre o valor das constantes a e k tal que a função

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 & x < 3 \\ a & x = 3 \\ \dfrac{kx+2}{2x-1} & x > 3 \end{cases} \tag{2.0}$$

seja comprovadamente contínua em $x = 3$.
Solução: Para a função ser contínua em $x = 3$, precisa satisfazer
$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$. (0.5)
Temos

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (3x^2 + 2x - 1) = 3 \cdot 9 + 2 \cdot 3 - 1 = 32 \ . \tag{0.5}$$

Portanto, necessitamos que $f(3) = 32$. Como pela definição da função, $f(3) = a$, segue que $a = 32$. (0.4)
Necessitamos ainda que $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 32$. Temos

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{kx+2}{2x-1} = \frac{\lim_{x\to 3^+}(kx+2)}{\lim_{x\to 3^+}(2x-1)} = \frac{k \cdot 3 + 2}{2 \cdot 3 - 1} = \frac{3k+2}{5} \stackrel{!}{=} 32 \ . \tag{0.5}$$

Assim, temos $3k + 2 = 160$, ou seja, $k = 158/3$ (0.1)

3. Calcule os seguintes limites:
(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2e^x \sin(2x) - (x+1)e^x}{x-1}$ (0.4) (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{6x^3 - x}{\sin(3x)}$ (0.8) (c) $\lim_{x\to 4} \dfrac{2\sqrt{x} - 4}{x-4}$ (0.8)
Solução:

   (a) Como os limites do numerador e do denominador existem,
$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^x \sin(2x) - (x+1)e^x}{x-1} = \frac{\lim_{x\to 0}(2e^x \sin(2x) - (x+1)e^x)}{\lim_{x\to 0}(x-1)}$$
$$= \frac{2e^0 \sin(0) - (0+1)e^0}{0-1} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1}{-1} = 1 \ . \tag{0.4}$$

   (b) Como numerador e denominador tendem a zero, temos um limite indeterminado. Reconhendo o fator comum x no numerador, podemos escrever

$$\lim_{x\to 0} \frac{6x^3 - x}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^2 - 1}{\sin(3x)/x} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^2 - 1}{3\sin(3x)/3x} \ . \tag{0.4}$$

   Nesta expressão, os limites do numerador e do denominador existem. Portanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{6x^2 - 1}{3\sin(3x)/3x} = \frac{\lim_{x\to 0}(6x^2 - 1)}{3\lim_{u\to 0} \sin(u)/u} = \frac{6 \cdot 0 - 1}{3 \cdot 1} = -\frac{1}{3} \ . \tag{0.4}$$

   (c) Como numerador e denominador tendem a zero, temos um limite indeterminado. Multiplicando pelo conjugado do numerador, obtemos

$$\lim_{x\to 4} \frac{2\sqrt{x} - 4}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{2\sqrt{x} - 4}{x-4} \cdot \frac{2\sqrt{x} + 4}{2\sqrt{x} + 4} = \lim_{x\to 4} \frac{4x - 16}{(x-4)(2\sqrt{x} + 4)} \ . \tag{0.3}$$

Fatorizando,

$$\lim_{x\to 4}\frac{4x-16}{(x-4)(2\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to 4}\frac{4(x-4)}{(x-4)2(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{2}{\sqrt{x}+2}\ . \qquad (0.2)$$

Nesta expressão, os limites do numerador e do denominador existem. Portanto,

$$\lim_{x\to 4}\frac{2}{\sqrt{x}+2}=\frac{2}{\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}+2}=\frac{2}{\sqrt{4}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\ . \qquad (0.3)$$

4. Calcule as derivada das funções dadas:
(a) $f(x)=5x^4-3x^3+12x^2-6$ (0.4) (b) $g(x)=(x^6-x)\sqrt{x}$ (0.6)

(c) Usando a definição da derivada de uma função, calcule a derivada de

$$f(x)=(x+2)^2\ . \qquad (1.0)$$

Solução:

(a) $f'(x)=5\cdot 4x^{4-1}-3\cdot 3x^{3-1}+12\cdot 2x^{2-1}-0=20x^3-9x^2+24x.$ (0.4)

(b) $g'(x)=(6x^5-1)x^{1/2}+(x^6-x)\dfrac{1}{2}x^{-1/2}=(6x^5-1)\sqrt{x}+(x^6-x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ .$ (0.4)

Simplificando,

$(6x^5-1)\sqrt{x}+(x^6-x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=(6x^5-1)\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}(x^5-1)\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}(13x^5-3)\sqrt{x}.$ (0.2)

(c)
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x+2)^2-(x+2)^2}{\Delta x} \qquad (0.4)$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+\Delta x^2+4+2x\Delta x+4x+4\Delta x-(x^2+4x+4)}{\Delta x} \qquad (0.2)$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2+2x\Delta x+4\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2x+4)=2x+4=2(x+2). \qquad (0.4)$$

5. Determine, se possível, as retas tangente e normal à função $g(x)=x^{3/2}+x^{2/3}$ nos pontos $x=0$ e $x=1$. (2.0)

Solução: Derivada: $g'(x)=\dfrac{3}{2}x^{1/2}+\dfrac{2}{3}x^{-1/3}.$ (0.4)

Desta forma, a função não é derivável em $x=0$, porque a derivada não existe neste ponto. Portanto, não existem retas tangente e normal em $x=0$. (0.4)

Em $x=1$, temos a inclinação da reta tangente dada pela derivada da função, i.e., $m_t=g'(1)=\dfrac{3}{2}1^{1/2}+\dfrac{2}{3}1^{-1/3}=\dfrac{3\cdot 3+2\cdot 2}{3\cdot 2}=\dfrac{13}{6}$ e, portanto, a inclinação da reta normal dada por $m_n=-\dfrac{1}{m_t}=-\dfrac{6}{13}.$ (0.4)

Assim, as equações das retas procuradas são:

Reta tangente: $y_t(x)=\dfrac{13}{6}(x-1)+1^{3/2}+1^{2/3}=\dfrac{13}{6}x-\dfrac{1}{6}.$ (0.4)

Reta normal: $y_n(x)=-\dfrac{6}{13}(x-1)+1^{3/2}+1^{2/3}=-\dfrac{6}{13}x+\dfrac{32}{13}.$ (0.4)