Solução da Prova II

1. (a) $f(x) = (\cos x)^{4x} = e^{4x\ln(\cos x)}$, portanto (0.1)

$$f'(x) = e^{4x\ln(\cos x)}\left[4\ln(\cos x) + 4x\frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x)\right] \quad (0.3)$$

$$= 4(\cos x)^{4x}(\ln(\cos x) - x\tan x) \quad (0.1)$$

(b) $F(y) = \left(\dfrac{7y^3e^{2y}}{y^2-1}\right)$. Por diferenciação logarítmica:

$\ln F(y) = \ln 7 + 3\ln y + 2y - \ln(y^2-1)$. (0.1)

Portanto $\dfrac{1}{F(y)}F'(y) = 0 + \dfrac{3}{y} + 2 - \dfrac{1}{y^2-1}2y$. (0.3)

Desta forma $F'(y) = F(y)\dfrac{3(y^2-1)+2y(y^2-1)-2y^2}{y(y^2-1)}$ (0.1)

$$= \frac{7y^3e^{2y}}{y^2-1}\frac{2y^3+y^2-2y-3}{y(y^2-1)} = \frac{7y^2e^{2y}(2y^3+y^2-2y-3)}{(y^2-1)^2}. \quad (0.1)$$

(c) $P(t) = \operatorname{arctanh}\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{3t+1}\right) = \operatorname{arctanh}\left(\operatorname{sen}[3t+1]^{-1}\right)$ (0.1)

Múltiplas regras da cadeia (0.1 cada):

$$P'(t) = \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2([3t+1]^{-1})}\cdot\cos([3t+1]^{-1})\cdot(-1[3t+1]^{-2})\cdot 3 \quad (0.4)$$

$$= \frac{-3}{(3t+1)^2\cos^2(\frac{1}{3t+1})} \quad (0.2)$$

(d) $G(s) = \dfrac{s^2\operatorname{senh} s - 2s\cosh s}{s+1}$

Regras do quociente e do produto:

$$G'(s) = \frac{(2s\operatorname{senh} s + s^2\cosh s - 2\cosh s - 2s\operatorname{senh} s)(s+1) - (s^2\operatorname{senh} s - 2s\cosh s)1}{(s+1)^2} \quad (0.4)$$

$$= \frac{s^3\cosh s - 2s\cosh s + s^2\cosh s - 2\cosh s - s^2\operatorname{senh} s + 2s\cosh s}{(s+1)^2} \quad (0.1)$$

$$= \frac{s^3\cosh s + s^2\cosh s - 2\cosh s - s^2\operatorname{senh} s}{(s+1)^2} = \frac{(s^3-2)\cosh s + s^2e^{-s}}{(s+1)^2} \quad (0.2)$$

2. (a) $L_a = \displaystyle\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{\ln x} =$ “0^0” forma indeterminada.

$L_a = \displaystyle\lim_{x\leftarrow 1^-} e^{\ln x\ln(1-x)} =$ “$e^{0\cdot\infty}$” forma indeterminada.

$L_a = \displaystyle\lim_{x\leftarrow 1^-} e^{\frac{\ln(1-x)}{1/\ln x}} =$ “$e^{\frac{\infty}{\infty}}$” forma indeterminada, admitindo L'Hôpital. (0.1)

O limite no expoente: $\displaystyle\lim_{x\leftarrow 1^-}\frac{\ln(1-x)}{1/\ln x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\leftarrow 1^-}\frac{-1/(1-x)}{-1/x\ln^2 x}$

$= \displaystyle\lim_{x\leftarrow 1^-}\frac{x\ln^2 x}{1-x} =$ “$\dfrac{0}{0}$” forma indeterminada, admitindo L'Hôpital. (0.3)

Sem o fator que tende a 1: $\displaystyle\lim_{x\leftarrow 1^-}\frac{\ln^2 x}{1-x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\leftarrow 1^-}\frac{2\ln x/x}{-1} = 0.$ (0.2)

Portanto, $\displaystyle\lim_{x\leftarrow 1^-}\frac{x\ln^2 x}{1-x} = 0.$ (0.1)

Portanto, $L_a = e^0 = 1.$ (0.1)

(b) $L_b = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) =$ "$\infty - \infty$", forma indeterminada.

$L_b = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} =$ "$\frac{0}{0}$", forma indeterminada, admitindo L'Hôpital. (0.1)

$L_b \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - e^x}{(e^x - 1) + xe^x} =$ "$\frac{0}{0}$", forma indeterminada, admitindo L'Hôpital. (0.3)

$L_b = \lim_{x\to 0^+} \frac{-e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{2+x} = -\frac{1}{2}$ (0.3)

3. i. Domínio: A função admite todos os números reais, i.e., $\mathbb{D} = \mathbb{R}$. (0.1)

ii. Simetria: $f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+3} = \frac{x^2-1}{x^2+3} = f(x)$. Portanto, a função é par. (0.2)

iii. Intercepto do eixo y: $f(0) = -1/3$ (0.1)

Zeros da função: Zeros do numerador. $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. (0.1)

Sinal: Já que a função é contínua em $\mathbb{R}$, o sinal pode trocar somente em $x = -1$ e $x = 1$. Portanto, tem o mesmo sinal em todos os pontos de cada um dos três intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ e $(1, \infty)$.

Como $f(-2) = 3/7 > 0$, temos $f(x) > 0 \forall x \in (-\infty, -1)$.

Como $f(0) = -1/3 < 0$, temos $f(x) < 0 \forall x \in (-\infty, -1)$.

Como $f(2) = 3/7 > 0$, temos $f(x) > 0 \forall x \in (1, \infty)$. (0.3)

iv. Extremos e monotonia: Derivada primeira:

$f'(x) = \frac{2x(x^2+3) - 2x(x^2-1)}{(x^2+3)^2} = \frac{8x}{(x^2+3)^2}$. (0.3)

Pontos críticos:$f'(x) \nexists$: nunca; $f'(x) = 0$ em $x = 0$. (0.2)

Como $f'(-1) = -1/2 < 0$, temos $f'(x) < 0 \forall x \in (-\infty, 0)$.

Como $f'(1) = 1/2 > 0$, temos $f'(x) > 0 \forall x \in (-\infty, 0)$. (0.2)

Como $f'(x)$ troca de negativo para positivo em $x = 0$, a função possui um mínimo relativo neste ponto. (0.1)

Valor da função no extremo: $f(0) = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$ (0.1)

v. Concavidade e pontos de inflexão: Derivada segunda:

$f''(x) = 8\frac{1(x^2+3)^2 - 2x(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4} = 8\frac{x^2+3-4x^2}{(x^2+3)^3} = 8\frac{-3x^2+3}{(x^2+3)^3} = -24\frac{x^2-1}{(x^2+3)^3}$ (0.3)

Pontos críticos da derivada: $f''(x) \nexists$: nunca $f''(x) = 0$ em $x = \pm 1$. (0.1)

Concavidade: Como $f''(x) = \frac{-24 f(x)}{(x^2+3)^2}$, segue para o seu sinal:

$-\infty < x < -1$: $f''(x) < 0$: côncava para baixo

$-1 < x < 1$: $f''(x) > 0$: côncava para cima

$1 < x < \infty$: $f''(x) < 0$: côncava para baixo (0.3)

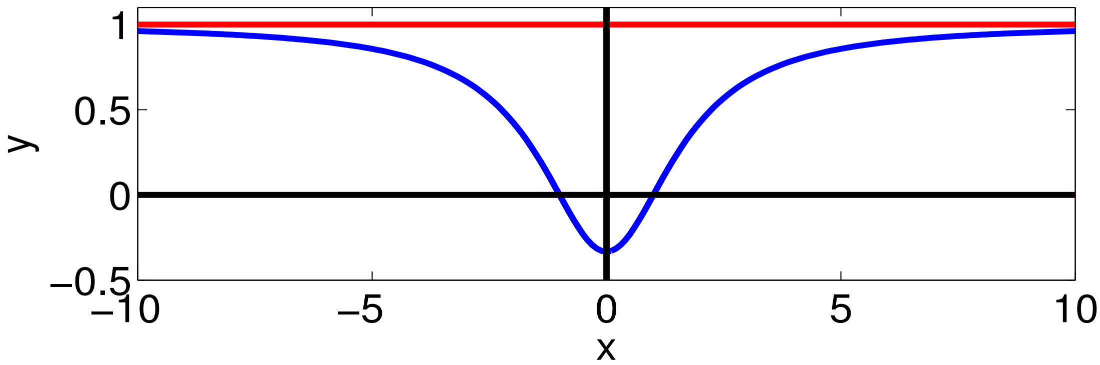
Como a concavidade troca nos dois pontos, temos pontos de inflexão em $x = 1$ e $x = -1$. (0.1)

vi. Assíntotas: Como a função é contínua em $\mathbb{R}$, ela não possui assíntotas verticais. (0.1)

Assíntotas horizontais: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-1/x^2}{1+3/x^2} = 1$ (0.3)

Portanto, a função tem a asíntota horizontal $y = 1$ quando x tende a mais e a menos infinito. (0.2)

vii. Esboço do gráfico e imagem:



(0.3)

Imagem da função: como visível no esboço do gráfico, a imagem da função é $\mathbb{V} = [-1/3, 1)$. (0.1)

4. Denotamos as laterais do cercado retantular por a e b.
A cerca deve ter comprimento de $C = 2a + 2b$ (0.2)
A área do cercado retangular ser de $A = 50 \cdot 8 = 400\text{m}^2$. (0.1)
Esta área é dada por $A = a \cdot b$. (0.1)
Portanto $b = \dfrac{400}{a}$. (0.1)
Desta forma $C(a) = 2a + 2\dfrac{400}{a} = 2a + \dfrac{800}{a}$. (0.2)
O intervalo para o comprimeto da lateral a é de $\mathbb{D} = (0, \infty)$. (0.1)
Para encontar os pontos críticos desta função temos que derivá-la.
Obtemos $C'(a) = 2 - \dfrac{800}{a^2}$. (0.2)
Os pontos críticos desta derivada são:
$C'(a) \nexists$ em $x = 0 \notin \mathbb{D}$ (0.2)
e $C'(a) = 2 - \dfrac{800}{a^2} = 0$, que acontece em $a^2 = 400$, i.e., $a = \pm 20$, dos quais somente $a = 20$ se encontra no intervalo $\mathbb{D}$. (0.3)
Em $a = 20$, temos $C(20) = 2 \cdot 20 + \dfrac{800}{20} = 80$ (0.2)
Nas pontas do intervalo, temos que considerar os limites:
$\lim\limits_{a \to 0^+} C(a) = \lim\limits_{a \to 0^+} 2a + 2\dfrac{400}{a} = 0 + \infty = \infty$ (0.2)
e $\lim\limits_{a \to \infty} C(a) = \lim\limits_{a \to \infty} 2a + 2\dfrac{400}{a} = \infty + 0 = \infty$. (0.2)
Como o valor $C(20)$ é menor do que estes dois limites, o ponto $a = 20$ representa o mínimo absoluto em $\mathbb{D}$. (0.2)
Concluímos que o cercado ótimo é um quadrado com lateral $a = 20$ m, e o fazendeiro vai precisar de 80 m de cerca para construí-lo. (0.2)