Solução da Prova III

(Cada setinha ($\checkmark$) vale 0.1)

1a. $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx$. Substituição: $u = 1-x\checkmark \Rightarrow -dx = du\checkmark$ e $x = 1-u \Rightarrow x^2 = 1-2u+u^2\checkmark$. Assim, temos $I = -\int \frac{1-2u+u^2}{\sqrt{u}}\,du\checkmark = -\int u^{-1/2}\,du + 2\int u^{1/2}\,du - \int u^{3/2}\,du\checkmark = -\frac{u^{1/2}}{1/2}\checkmark + 2\frac{u^{3/2}}{3/2}\checkmark - \frac{u^{5/2}}{5/2}\checkmark + C\checkmark = -2\sqrt{1-x} + \frac{4}{3}(1-x)^{3/2} - \frac{2}{5}(1-x)^{5/2} + C\checkmark = -\frac{2}{15}\sqrt{1-x}[15-10(1-x)+3(1-x)^2] = -\frac{2}{15}\sqrt{1-x}(3x^2+4x+8)+C\checkmark$. (1.1)

1b. $\int x^3 e^{x^2}\,dx$. Substituição: $x^2 = u\checkmark \Rightarrow 2xdx = du\checkmark$. Assim, $I = \frac{1}{2}\int ue^u\,du\checkmark$. Integração por partes com $f = u$ e $g' = e^u\checkmark \Rightarrow f' = 1$ e $g = e^u\checkmark$. Assim, $I = \frac{1}{2}\left(ue^u\checkmark - \int e^u\,du\checkmark\right) = \frac{1}{2}(ue^u - e^u\checkmark) + C\checkmark = \frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2} + C\checkmark$. (1.0)

1c. $I = \int \frac{3x+7}{(x^2+2x+5)(x+1)}\,dx$. Frações parciais: $\frac{3x+7}{(x^2+2x+5)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+5}\checkmark + \frac{C}{x+1}\checkmark = \frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+5)}{(x^2+2x+5)(x+1)} \Rightarrow 3x+7 = (Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+5) = (A+C)x^2+(A+B+2C)x+B+5C\checkmark$. Estas expressões precisam ser iguais para todo x. Isto fornece três equações para A, B e C: Em $x=-1$: $-3+7 = 0 + C(1-2+5)\checkmark \Rightarrow C = 1\checkmark$. Em $x=0$: $7 = B+5C\checkmark \Rightarrow B = 2\checkmark$. Coeficiente de x^2: $0 = A+C\checkmark \Rightarrow A = -1\checkmark$. Portanto, $I = \underbrace{\int \frac{-x+2}{x^2+2x+5}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{1}{x+1}\,dx}_{I_2}\checkmark$. A segunda integral I_2 é pode ser facilmente integrada, resultando em $I_2 = \ln|x+1|\checkmark + C_1$. Na primeira integral I_1, o termo linear precisa ser modificado de modo a representar a derivada do denominador. Como $(x^2+2x+5)' = 2x+2$ e $-x+2 = -\frac{1}{2}(2x+2)+3\checkmark$, podemos escrever $I_1 = -\frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx}_{I_{11}} + 3\underbrace{\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx}_{I_{12}}\checkmark$. A primeira destas integrais, I_{11}, fornece $I_{11} = \ln(x^2+2x+5)\checkmark + C_{11}$. Na segunda destas integrais, I_{12}, rescrevemos o denominador de acordo com $x^2+2x+5 = x^2+2\cdot 1\cdot x+1+4 = (x+1)^2+4\checkmark = 4\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right]\checkmark$. Assim, substituição: $u = \frac{x+1}{2}\checkmark \Rightarrow du = \frac{1}{2}dx\checkmark$ fornece $I_{12} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1}2\,du\checkmark = \frac{1}{2}\arctan u\checkmark + C_{12} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\checkmark + C_{12}$. Desta forma, obtemos $I = -\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + \ln|x+1|\checkmark + C\checkmark$. (2.3)

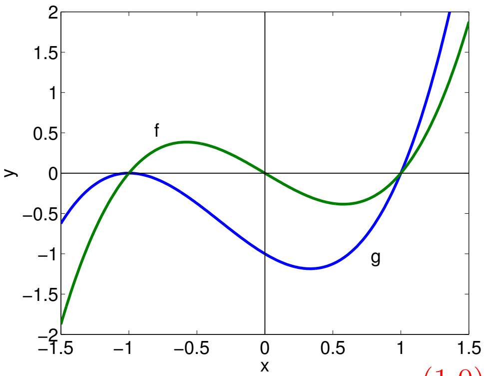
1d. $I = \int_{3/2}^{3} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$. Substituição trigonométrica: $x = 3\sin u\checkmark \Rightarrow dx = 3\cos u\,du\checkmark$ e $\sqrt{9-x^2} = 3\cos u\checkmark$. Limites de integração: $x = 3/2 \Rightarrow u = \pi/6\checkmark$ e $x = 3 \Rightarrow u = \pi/2\checkmark$. Isso fornece $I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{3\cos u}{9\sin^2 u}3\cos u\,du\checkmark = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot^2 u\,du\checkmark = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin^2 u}-1\right)du\checkmark = -\cot u\big|_{\pi/6}^{\pi/2}\checkmark - u\big|_{\pi/6}^{\pi/2}\checkmark = -(0-\sqrt{3}) - \left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\checkmark = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\checkmark$. (1.2)

Caminho alternativo: Integral indeterminada: $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$. Substituição trigonométrica: $x = 3\sin u \checkmark \Rightarrow dx = 3\cos u\, du \checkmark$ e $\sqrt{9-x^2} = 3\cos u \checkmark$, fornece $I = \displaystyle\int \frac{3\cos u}{9\sin^2 u} 3\cos u\, du \checkmark = \int \cot^2 u\, du \checkmark = \int \left(\frac{1}{\sin^2 u} - 1\right) du \checkmark = -\cot u \checkmark - u \checkmark + C \checkmark = -\cot\left(\arcsin(\frac{x}{3})\right) - \arcsin(\frac{x}{3}) \checkmark + C = -\frac{\sqrt{1-(x/3)^2}}{x/3} - \arcsin(\frac{x}{3}) + C = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsin(\frac{x}{3}) + C$. Assim, $I = -\left(0 - \frac{\sqrt{9-9/4}}{3/2}\right) - \left(\arcsin 1 - \arcsin(\frac{1}{2})\right) \checkmark = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{27}{4}} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \checkmark$.

2. $I_c = \displaystyle\int_2^\infty \frac{x}{(x^2-3)^{3/2}}\,dx$. Substituição: $u = x^2 - 3 \checkmark \Rightarrow du = 2xdx \checkmark \Rightarrow xdx = du/2 \checkmark$; limites de integração: $u(2) = 4 - 3 = 1 \checkmark$ e $\lim\limits_{x\to\infty} u \checkmark = \infty \checkmark$. Assim,

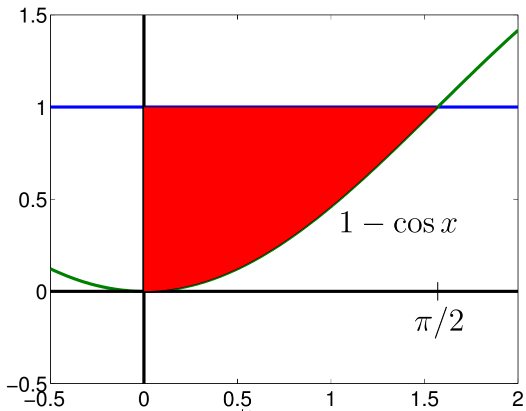
$$I_c = \int_1^\infty \checkmark \frac{1}{u^{3/2}} \frac{du}{2} \checkmark = \frac{1}{2}\int_1^\infty u^{-3/2}\,du \checkmark = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_1^b u^{-3/2}\,du \checkmark = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} \left.\frac{u^{-1/2}}{-1/2}\right|_1^b \checkmark = -\lim_{b\to\infty}\left(b^{-1/2} - 1^{-1/2}\right) \checkmark = 1 - \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\sqrt{b}} \nearrow^{0\checkmark} = 1 \checkmark. \qquad (1.4)$$

3. Área: Os gráficos se interceptam em $f(x) = g(x)$, i.e., $x^3 - x = x^3 + x^2 - x - 1 \checkmark$, i.e., $x^2 - 1 = 0 \checkmark$, ou seja, $x = 1$ e $x = -1 \checkmark$. Como $f(x) > g(x)\ \forall -1 < x < 1$ (gráfico)$\checkmark$, temos $A = \displaystyle\int_{-1}^1 \checkmark \left(x^3 - x - (x^3 + x^2 - x - 1)\right) dx \checkmark = \int_{-1}^1 (-x^2+1)\,dx \checkmark = \left.\left(-\frac{x^3}{3} + x\right)\right|_{-1}^1 \checkmark = \left(-\frac{1}{3} + 1\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) \checkmark = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \checkmark$u.a.



(1.0)

4. A interseção entre a reta $y = 1$ e a função $f(x) = 1 - \cos x$ ocorre onde $1 - \cos x = 1 \checkmark$, i.e., $\cos x = 0$, ou seja, pela primeira vez em $x = \pi/2 \checkmark$.
Volume: Uma vez que a rotação da área entre a reta $y = 1$ e função $f(x) = 1 - \cos x$ pelo eixo horizontal deixa um objeto oco, o volume é obtido pela diferença dos volumes obtidos pela rotação da reta, V_c, e da função, V_f, i.e., $V = V_c - V_f \checkmark$, onde V_c é o volume do cilindro com raio 1 e V_f é o volume recortado pela função.



Assim, $V_c = \pi \displaystyle\int_0^{\pi/2} \checkmark 1^2 dx \checkmark = \pi x|_0^{\pi/2} \checkmark = \frac{\pi^2}{2} \checkmark$, e $V_f = \pi \displaystyle\int_0^{\pi/2} (1 - \cos x)^2\,dx \checkmark = \pi \int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos x + \cos^2 x)\,dx \checkmark = \pi\left[x|_0^{\pi/2} \checkmark - 2\sin x|_0^{\pi/2} \checkmark + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) \checkmark dx\right] = \frac{\pi^2}{2} \checkmark - 2\pi \checkmark + \frac{\pi}{2}\left[x|_0^{\pi/2} \checkmark - \frac{1}{2}\sin 2x|_0^{\pi/2} \checkmark\right] = \frac{\pi^2}{2} - 2\pi + \frac{\pi^2}{4} \checkmark - 0 \checkmark = \frac{3\pi^2}{4} - 2\pi \checkmark$. Desta forma, o volume procurado é $V = \frac{\pi^2}{2} - \left[\frac{3\pi^2}{4} - 2\pi\right] = 2\pi - \frac{\pi^2}{4} \checkmark$. (2.0)