GABARITO

MA 111 - Cálculo I - Primeiro semestre de 2022

Prova 1 - 28/04/2022 (5ª noturno)

Horário: 19h às 20h50

Questão	Ponto
1	2,0
2	3,0
3	1,0
4	2,5
5	1,5
Total	10

Questão 1 (2 pontos) Resolva a desigualdade

$$|x+1| + |x-1| \leq 4.$$

Encontre o conjunto solução e ilustre-o sobre a reta real.

Solução: As raízes de $(x+1)$ e $x-1$ são $x=-1$ e $x=1$, respectivamente. Assim, vamos dividir em três casos.

Caso 1: $x \geq 1$.

Neste caso temos que $|x-1| = x-1$ e $|x+1| = x+1$. Portanto, a desigualdade dada equivale a

$$x+1+x-1 \leq 4,$$

ou seja, $x \leq 2$. Daqui segue que devemos ter $1 \leq x \leq 2$.

Caso 2: $-1 \leq x < 1$.

Aqui temos que $|x-1| = -(x-1) = -x+1$ e $|x+1| = x+1$. Logo, a desigualdade dada é equivalente a

$$x+1-x+1 \leq 4, \text{ ou seja, } 2 \leq 4.$$

Como esta desigualdade é sempre verdadeira, aqui devemos ter $-1 \leq x < 1$.

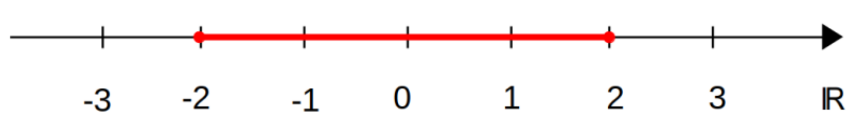
Caso 3: $x < -1$.

Neste caso temos $|x-1| = -(x-1) = -x+1$ e $|x+1| = -(x+1) = -x-1$ e a desigualdade dada equivale a

$$-x-1-x+1 \leq 4,$$

ou seja, $x \geq -2$. Isso significa que aqui devemos ter $-2 \leq x < -1$.

Conclusão: Observando os três casos acima, e unindo os resultados obtidos em cada caso, vemos que o conjunto solução é o intervalo $[-2, 2]$ e sua ilustração sobre a reta real segue abaixo:



Questão 2 (3 pontos) Avalie os limites abaixo e encontre o valor correspondente caso exista (sem usar a regra de L'Hospital). **Justifique** suas respostas.

(a) (0,6) $\displaystyle\lim_{x\to 4^-}\left(\frac{5x-3}{x^2-16}\right)$

(b) (0,6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x^2+7}{9x^3-12x^2-21}$

(c) (0,8) $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x+4}-4}{x-3}$

(d) (1,0) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^5\cos\left(\frac{1}{x^8}\right)$

Solução:

(a) Note que neste limite o denominador tende a zero e o numerador tende para 17, quando $x\to 4^-$. Como x aproxima-se a esquerda de 4, temos que $x^2-16\to 0^-$, isto é, o denominador tende a zero negativamente. Portanto, concluímos que

$$\lim_{x\to 4^-}\left(\frac{5x-3}{x^2-16}\right)=-\infty$$

(b) Multiplicando o numerador e o denominador por $\frac{1}{x^3}$, obtemos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x^2+7}{9x^3-12x^2-21}\cdot\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^3}}{9-\frac{12}{x}-\frac{21}{x^3}}=\frac{2-\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x^3}}{9-\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{12}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{21}{x^3}}=\frac{2-0+0}{9-0-0}=\frac{2}{9}.$$

(c) Multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado do numerador, obtemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x+4}-4}{x-3}&=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x+4}-4}{x-3}\cdot\frac{(\sqrt{4x+4}+4)}{(\sqrt{4x+4}+4)}=\lim_{x\to 3}\frac{4x-12}{(x-3)(\sqrt{4x+4}+4)}\\&=\lim_{x\to 3}\frac{4(x-3)}{(x-3)(\sqrt{4x+4}+4)}=\lim_{x\to 3}\frac{4}{(\sqrt{4x+4}+4)}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(d) Utilizando o fato que

$$-1\le\cos(x)\le 1,\ \forall\, x\in\mathbb{R},$$

e multiplicando por x^5 (note que $x^5>0$ para $x>0$), obtemos que

$$-x^5\le x^5\cos\left(\frac{1}{x^8}\right)\le x^5,\ \forall\, x\neq 0.$$

Agora, observando que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(-x^5)=\lim_{x\to 0^+}x^5=0$, podemos utilizar o Teorema do Confronto para obter que

$$\lim_{x\to 0^+}x^5\cos\left(\frac{1}{x^8}\right)=0.$$

Questão 3 (1 ponto) Considere a função

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x-1}, & \text{se} \quad x \neq 1 \\ \\ L, & \text{se} \quad x = 1. \end{cases}$$

Determine se existe L tal que g é contínua. Caso exista, encontre o valor de L. Em qualquer caso, **justifique** sua resposta.

Solução: Para que g seja contínua em $x = 1$ é necessário que o limite $\lim_{x\to 1} g(x)$ exista e seja igual a $g(1) = L$. Como a expressão que define a função é diferente para $x > 1$ e $x < 1$, vamos analisar os limites laterais:

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) \overset{x \geq 1}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) \overset{x \leq 1}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} (-1) = -1.$$

Como os limites laterais são distintos então $\lim_{x\to 1} g(x)$ não existe. Portanto, não existe L para o qual g seja contínua em $x = 1$.

Questão 4 (2,5 pontos) Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x^2+8}{4x^2-9}, & \text{se} \quad x \geq 2 \\ \\ 13-3x, & \text{se} \quad x < 2 \end{cases}$$

(a) (1,0) A função f é contínua em $x = 2$? Justifique sua resposta.

(b) (1,5) Caso existam, encontre as assíntotas horizontais e verticais de f.

Solução:

(a) A função f ser contínua em $x = 2$ significa que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2).$$

Observe que $f(2) = \frac{5(2^2)+8}{4(2^2)-9} = \frac{28}{7} = 4$. Agora avaliemos o limite em $x = 2$, via os limites laterais. Temos que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \overset{x<2}{=} \lim_{x\to 2^-} (13-3x) = 13 - 3 \cdot 2 = 7$$

e

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) \overset{x\geq 2}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{5x^2+8}{4x^2-9} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \left(5x^2+8\right)}{\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \left(4x^2-9\right)} = \frac{5(2^2)+8}{4(2^2)-9} = \frac{28}{7} = 4.$$

Como os limites laterais são diferentes, segue que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ não existe, e então f não é contínua em $x = 2$.

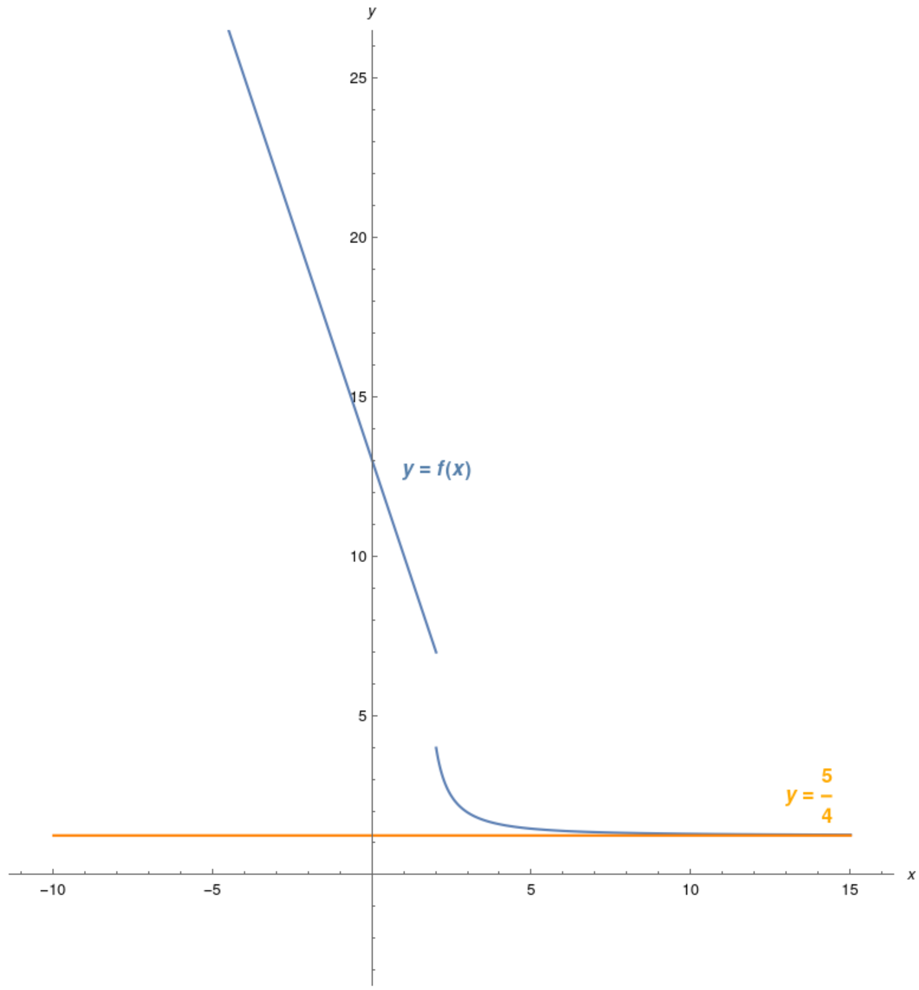
(b) *Assíntotas horizontais:* Avaliando o limite quando $x \to \infty$, temos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \overset{x\geq 2}{=} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{5x^2+8}{4x^2-9}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(5+\frac{8}{x^2})}{x^2(4-\frac{9}{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(5+\frac{8}{x^2})}{(4-\frac{9}{x^2})} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{8}{x^2}\right)}{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(4-\frac{9}{x^2}\right)} = \frac{5+0}{4-0} = \frac{5}{4},$$

pois $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$. Segue que $y = \frac{5}{4}$ é a assíntota horizontal de f quando $x \to \infty$. Para $x \to -\infty$, não existe assíntota horizontal, pois $f(x) = 13 - 3x$ e então $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

Assíntotas verticais: Para ter-se uma assíntota vertical em $x = a$, algum dos limites laterais de f em a precisa ser ∞ ou $-\infty$. O limite de f existe para todo $x < 2$ e para todo $x > 2$, logo os limites laterais sempre existem para todo $x \neq 2$. Em $x = 2$, pela resolução do item (a), o limite não existe, mas ambos os limites laterais existem. Portanto, f **não tem** assíntotas verticais.


y
25
20
15
10
5
y = f(x)
y = 5/4
−10
−5
5
10
15
x

Questão 5 (1,5 ponto) Mostre que a equação

$$7\cos(x) = 2x - 3$$

tem pelo menos uma solução real.

Solução: Encontrar x que satisfaça a igualdade

$$7\cos(x) = 2x - 3$$

é equivalente a encontrar x tal que

$$7\cos(x) - 2x + 3 = 0.$$

Em outras palavras, precisamos mostrar a existência de uma raiz da função

$$f(x) = 7\cos(x) - 2x + 3.$$

Note que

$$f(0) = 7\cos(0) - 2 \cdot 0 + 3 = 10 > 0$$

e

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 7\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 \cdot \frac{\pi}{2} + 3 = -\pi + 3 < 0.$$

Então, como a função é contínua em $\mathbb{R}$, pois é soma/diferença de funções contínuas em $\mathbb{R}$, podemos utilizar o Teorema do Valor Intermediário em $[0, \frac{\pi}{2}]$ e concluir que existe $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $f(x) = 0$, ou seja, existe x tal que $7\cos(x) = 2x - 3$.