GABARITO

MA 111 - Cálculo I - Primeiro semestre de 2022
Prova 1 - 28/04/2022 (5ª vespertino)

Questão	Ponto
1	2,0
2	3,0
3	1,0
4	2,5
5	1,5
Total	10

Questão 1 (2 pontos) Resolva a desigualdade

$$|2x - 3| \leq |x|.$$

Encontre o conjunto solução e ilustre-o sobre a reta real.

Solução: A desigualdade é equivalente a

$$-|x| \leq 2x - 3 \leq |x| \tag{1}$$

Vamos dividir em dois casos, quando x é positivo e quando x é negativo:

- $x > 0$: Neste caso temos que desigualdade (1) é equivalente a

  $$-x \leq 2x - 3 \leq x.$$

  Analisando as desigualdades separadamente, obtemos

  $-x \leq 2x - 3 \Leftrightarrow 3 \leq 3x \Leftrightarrow x \geq 1$

  e

  $2x - 3 \leq x \Leftrightarrow x \leq 3$

  Portanto, no caso em que $1 \leq x \leq 3$ temos que a desigualdade é satisfeita.

- $x < 0$: Neste caso temos que desigualdade (1) é equivalente a

  $$x \leq 2x - 3 \leq -x.$$

  Analisando as desigualdades separadamente, obtemos

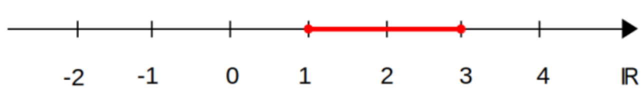
  $x \leq 2x - 3 \Leftrightarrow 3 \leq x \Leftrightarrow x \geq 3$

  e

  $2x - 3 \leq -x \Leftrightarrow 3x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 1.$

  Como não é possível ocorrer ao mesmo tempo $x < 0$, $x \geq 3$ e $x \leq 1$, temos que neste caso não há valores para os quais a desigualdade seja satisfeita.

Juntando os resultados obtidos em cada caso, vemos que o conjunto solução é o intervalo $[1, 3]$ e sua ilustração sobre a reta real segue abaixo:



Questão 2 (3 pontos) Avalie os limites abaixo e encontre o valor correspondente caso exista (sem usar a regra de L'Hospital). **Justifique** suas respostas.

(a) (0,6) $\lim_{x\to 3} \dfrac{|x-3|}{x-3}$

(b) (0,7) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{3x^3+2x-1}{x^3-3}$

(c) (0,7) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{2x^3-x+3}{1-e^x}$

(d) (1,0) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2+1}$

Solução:

(a) Analisando os limites laterais

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

concluímos que eles são diferentes e portanto o limite $\lim_{x\to 3} \dfrac{|x-3|}{x-3}$ não existe.

(b) Dividindo o numerador e o denominador por x^3 obtemos que

$$\frac{3x^3+2x-1}{x^3-3} = \frac{\dfrac{3x^3+2x-1}{x^3}}{\dfrac{x^3-3}{x^3}} = \frac{3+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{3}{x^3}}, \text{ para todo } x \neq 0.$$

Usando que $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ e $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$, conluímos que

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^3+2x-1}{x^3-3} = \frac{\lim_{x\to -\infty}\left(3+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim_{x\to -\infty}\left(1-\dfrac{3}{x^3}\right)} = \frac{3}{1} = 3,$$

ou seja, $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{3x^3+2x-1}{x^3-3} = 3.$

(c) Note que $\lim_{x\to 0^+} (2x^3-x+3) = 3$ e que $\lim_{x\to 0^+} (1-e^x) = 0$. Além disso, para $x \to 0^+$ temos que $\dfrac{2x^3-x+3}{1-e^x} < 0$. Portanto,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^3-x+3}{1-e^x} = -\infty.$$

(d) Note que

$$0 \leq \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

e que

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^2+1} = 0.$$

Assim, pelo Teorema do Confronto, obtemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\text{sen}^2(x)}{x^2+1} = 0.$$

Questão 3 (1 ponto) Determine L para que a função f definida abaixo seja contínua em $x = 5$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{10}}, & \text{se} \quad x \neq 5 \\ \\ L, & \text{se} \quad x = 5 \end{cases}$$

Solução: A função f será contínua em $x = 5$ se o limite $\lim_{x\to 5} f(x)$ existir e for igual a $f(5) = L$. Como $f(x)$ é um quociente cujo numerador e denominador convergem a zero quando x tendo a 5, precisamos manipular a expressão que define f. Primeiro vamos racionalizar

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{10}}\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{10}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{10}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x+5}+\sqrt{10})}{x-5}$$

Ainda temos que ambos numerador e denominador convergem a zero, mas usando o produto notável $x - 5 = (\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})$ vemos que, para $x \neq 5$,

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x+5}+\sqrt{10})}{x-5} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x+5}+\sqrt{10})}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{10}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5}\left(\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{10}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}\right) = \frac{\lim_{x\to 5}(\sqrt{x+5}+\sqrt{10})}{\lim_{x\to 5}(\sqrt{x}+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5+5}+\sqrt{10}}{\sqrt{5}+\sqrt{5}} = \sqrt{2}.$$

Portanto, se $L = \sqrt{2}$ então a função é contínua em $x = 5$.

Questão 4 (2,5 pontos) Calcule as assíntotas horizontais e verticais da função abaixo, se existirem. Caso não existam, **justifique** sua resposta.

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x-1}.$$

Solução: *Assíntotas horizontais:* Dizemos que $y = L$ é uma assíntota horizontal de f se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$. Portanto, precisamos analisar o limite de f no infinito:

- $x \to +\infty$: Dividindo o numerador e o denominador por x (com $x > 0$) obtemos

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x-1} = \frac{\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}{\dfrac{x-1}{x}} = \frac{\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2}}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}.$$

Usando que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, obtemos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)} = \sqrt{2}.$$

- $x \to -\infty$: Dividindo o numerador e o denominador por $-x$ (com $x < 0$) obtemos

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x-1} = \frac{\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{-x}}{\dfrac{x-1}{-x}} = \frac{\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2}}}{-1+\dfrac{1}{x}} = \frac{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{-1+\dfrac{1}{x}}.$$

Usando que $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, obtemos que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\lim_{x\to-\infty} \sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to-\infty} \left(-1+\dfrac{1}{x}\right)} = -\sqrt{2}.$$

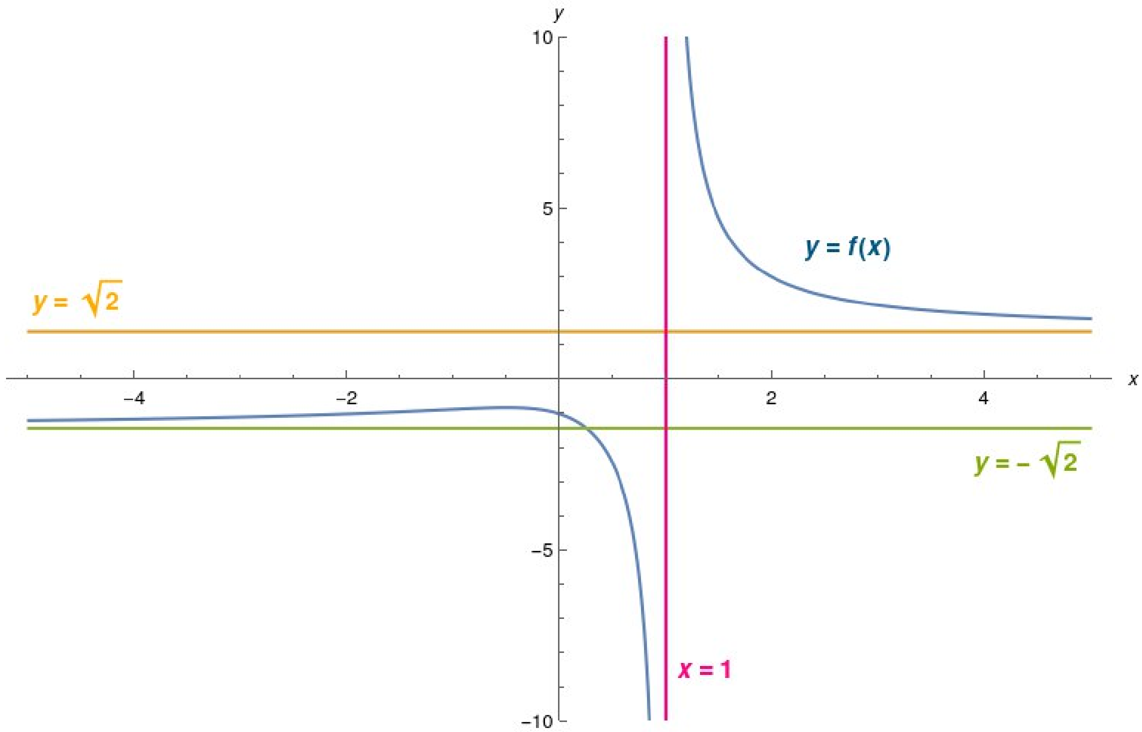
Portanto, $y = \sqrt{2}$ é assíntota horizontal de f quando $x \to +\infty$ e $y = -\sqrt{2}$ é assíntota horizontal de f quando $x \to -\infty$.

Assíntotas verticais: Para ter-se uma assíntota vertical em $x = a$, algum dos limites laterais de f em a precisa ser ∞ ou $-\infty$. Para a função em questão, os pontos em que isso pode ocorrer são aqueles que zeram o denominador de f, ou seja, $x = 1$. Temos que $\lim_{x\to1^+} \sqrt{2x^2+1} = 3$. Para $x \to 1^+$ temos que $x - 1 > 0$ e para $x \to 1^-$ temos que $x - 1 < 0$. Portanto, para $x \to 1^+$ temos que $f(x) > 0$ e para $x \to 1^-$ temos que $f(x) < 0$. Como o denominador converge a zero quando x

se aproxima de 1, concluímos que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

Portanto, a reta $x = 1$ é assíntota vertical de f.



Questão 5 (1,5 ponto) Mostre que a equação

$$\sqrt{x+\pi} = 1 - \operatorname{sen}(x)$$

tem pelo menos uma solução real.

Solução: Vamos definir $f(x) = \sqrt{x+\pi} - 1 + \operatorname{sen}(x)$. Note que x é solução da equação dada no exercício se e somente se $f(x) = 0$. Além disso, f é contínua em $[-\pi, +\infty)$ e temos que $f(-\pi) = -1 < 0$ e $f(\pi) = \sqrt{2\pi} - 1 > 0$. Portanto, podemos aplicar o Teorema do Valor Intermediário à f no intervalo $[-\pi, \pi]$ e obter que existe $c \in (-\pi, \pi)$ tal que $f(c) = 0$, i.e., $\sqrt{c+\pi} = 1 - \operatorname{sen}(c)$.