GABARITO

MA 111 - Cálculo I - Primeiro semestre de 2022
Prova 1 - 29/04/2022 (6ª diurno)

Questão	Ponto
1	2,0
2	3,0
3	1,5
4	2,0
5	1,5
Total	10

Questão 1 (2 pontos) Resolva a desigualdade

$$\left|\frac{-x+3}{x+1}\right| < 2.$$

Encontre o conjunto solução e ilustre ele sobre a reta real.

Solução: A desigualdade é equivalente a

$$-2 < \frac{-x+3}{x+1} < 2 \tag{1}$$

Vamos dividir em dois casos, quando o denominador é positivo e quando é negativo:

- $x > -1$: Neste caso temos que desigualdade (1) é equivalente a

  $$-2(x+1) < -x+3 < 2(x+1).$$

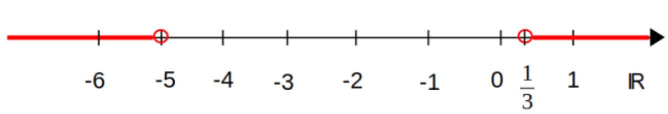
  Analisando as desigualdades separadamente, obtemos
  $-2(x+1) < -x+3 \Leftrightarrow -5 < x \Leftrightarrow x > -5,$
  $-x+3 < 2(x+1) \Leftrightarrow 1 < 3x \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{3}.$
  Portanto, no caso em que $x > \frac{1}{3}$ temos que a desigualdade é satisfeita.

- $x < -1$: Neste caso temos que desigualdade (1) é equivalente a

  $$-2(x+1) > -x+3 > 2(x+1).$$

  Analisando as desigualdades separadamente, obtemos
  $-2(x+1) > -x+3 \Leftrightarrow -5 > x \Leftrightarrow x < -5,$
  $-x+3 > 2(x+1) \Leftrightarrow 1 > 3x \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{3}.$
  Portanto, no caso em que $x < -5$ temos que a desigualdade é satisfeita.

Juntando os resultados obtidos em cada caso, vemos que o conjunto solução é $(-\infty, -5) \cup \left(\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$ e sua ilustração sobre a reta real segue abaixo:



Questão 2 (3 pontos) Avalie os limites abaixo e encontre o correspondente valor caso exista (sem usar a regra de L'Hospital). **Justifique** suas respostas.

(a) (0,6) $\lim_{x\to p} \dfrac{x^3-p^3}{x-p}$

(b) (1,0) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)}$

(c) (0,7) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

(d) (0,7) $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x}{|x-2|}$

Solução

(a) Temos que

$$\lim_{x\to p}\frac{x^3-p^3}{x-p} = \lim_{x\to p}\frac{(x-p)(x^2+xp+p^2)}{x-p} = \lim_{x\to p}(x^2+xp+p^2) = 3p^2.$$

(b) Como a função seno varia entre -1 e 1 e a função raíz é positiva temos que

$$-\sqrt{x^2+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} \le \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} \le \sqrt{x^2+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}, \text{ para todo } x\neq 0.$$

Além disso,

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = 0 \ \text{ e } \ \lim_{x\to 0}\left(-\sqrt{x^2+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\right) = 0.$$

Portanto, pelo Teorema do Confronto, obtemos que

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = 0.$$

(c) Multiplicando e dividindo a expressão pelo seu conjungado obtemos

$$\sqrt{x^2+x}-x = (\sqrt{x^2+x}-x)\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

Como $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$, concluímos que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \frac{1}{\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{2}.$$

(d) Temos que $\lim_{x\to 2^+} x = 2$ e $\lim_{x\to 2^+}|x-2| = 0$. Além disso, $\dfrac{x}{|x-2|} > 0$ para todo $x>2$. Portanto,

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{|x-2|} = +\infty.$$

Questão 3 (1,5 ponto) Determine para quais valores de a a função f definida abaixo é contínua em $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, \text{ se } x \leq 1 \\ \\ a^2x^2 - 1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

Solução: Para que f seja contínua em $x = 1$ é necessário que o limite $\lim_{x\to 1} f(x)$ exista e seja igual a $f(1) = 1 + a$. Como a expressão que define a função é diferente para $x < 1$ e $x > 1$, vamos analisar os limites laterais:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2 + ax) = 1 + a$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (a^2x^2 - 1) = a^2 - 1$$

Logo, para que f seja contínua em $x = 1$ é necessário que os limites lateriais acima sejam iguais a $f(1) = 1 + a$, ou seja, $1 + a = a^2 - 1$. Por Bhaskara, temos que as raízes da equação $a^2 - a - 2 = 0$ são $a = -1$ e $a = 2$. Portanto, os valores de a que tornam f contínua em $x = 1$ são $a = -1$ e $a = 2$.

Questão 4 (2 pontos) Calcule as assíntotas horizontais e verticais da função abaixo, se existirem. Caso não existam, **justifique** sua resposta.

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{2x^2 - x}$$

Solução: *Assíntotas horizontais:* Analisando o limite de $f(x)$ quando $x \to \pm\infty$, observamos que tanto o numerador quanto o numerador vão para $+\infty$. Portanto, para calcular o limite de f no infinito precisamos primeiro manipular a expressão. Dividindo o numerador e o denominador por x^2 obtemos que

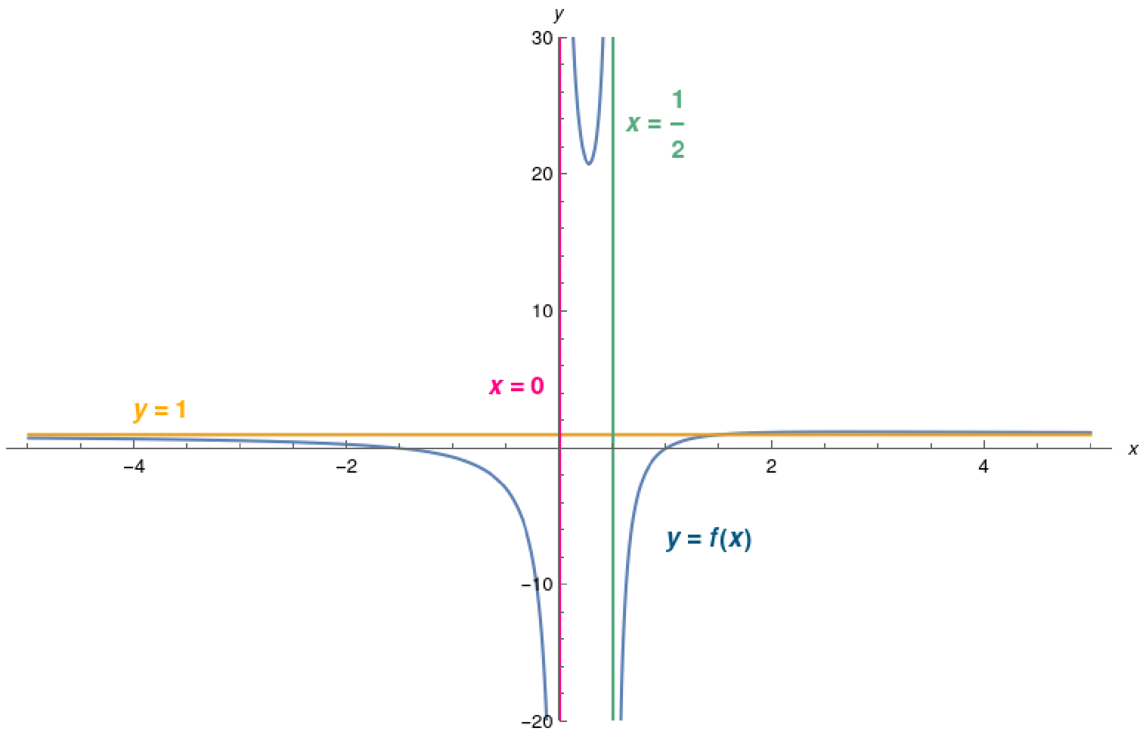
$$f(x) = \frac{\dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2}}{\dfrac{2x^2 - x}{x^2}} = \frac{2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2}}{2 - \dfrac{1}{x}}.$$

Como $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right) = 2$ e $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x}\right) = 2$, então $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$. Portanto, $y = 1$ é a assíntota horizontal de f quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$.

Assíntotas verticais: Para ter-se uma assíntota vertical em $x = a$, algum dos limites laterais de f em a precisa ser ∞ ou $-\infty$. Para a função em questão, os pontos em que isso pode ocorrer são aqueles que zeram o denominador de f, ou seja, $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$. Vamos analisar esses pontos separadamente:

- $x = 0$: Temos que $\lim\limits_{x \to 0}(2x^2 + x - 3) = -3$. Para $x \to 0^+$ temos que $2x^2 - x < 0$ e para $x \to 0^-$ temos que $2x^2 - x > 0$. Portanto, para $x \to 0^+$ temos que $f(x) > 0$ e para $x \to 0^-$ temos que $f(x) < 0$. Como o denominador converge a zero quando x se aproxima de zero, concluímos que
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \ \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$
- $x = \frac{1}{2}$: Temos que $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}}(2x^2 + x - 3) = -2$. Para $x \to \frac{1}{2}^+$ temos que $2x^2 - x > 0$ e para $x \to \frac{1}{2}^-$ temos que $2x^2 - x < 0$. Portanto, para $x \to \frac{1}{2}^+$ temos que $f(x) < 0$ e para $x \to \frac{1}{2}^-$ temos que $f(x) > 0$. Como o denominador converge a zero quando x se aproxima de $\frac{1}{2}$, concluímos que
$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \ \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$$

Portanto, as retas $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$ são assíntotas verticais de f.


y
30
20
10
−10
−20
x
−4
−2
2
4
x = 1/2
x = 0
y = 1
y = f(x)

Questão 5 (1,5 pontos) Mostre que existe um número real que é igual a soma de seu cubo e de seu quadrado menos cinco.

Solução: Devemos mostrar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$x = x^3 + x^2 - 5.$$

Para isso, vamos definir $f(x) = x^3 + x^2 - x - 5$. Note que x é solução da equação acima se e somente se $f(x) = 0$. Além disso, note que f é contínua em $\mathbb{R}$ e que $f(0) = -5 < 0$ e $f(2) = 5 > 0$. Portanto, podemos aplicar o Teorema do Valor Intermediário à f no intervalo $[0, 2]$ e obter que existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, $c = c^3 + c^2 - 5$.