GABARITO

MA 111 - Cálculo I - Primeiro semestre de 2022
Prova 1 - 29/04/2022 (6ª noturno)

Questão	Ponto
1	2,0
2	2,5
3	1,5
4	2,5
5	1,5
Total	10

Questão 1 (2 pontos) Resolva a desigualdade

$$|x+1| - |x-3| \leq 2x.$$

Encontre o conjunto solução e ilustre-o sobre a reta real.

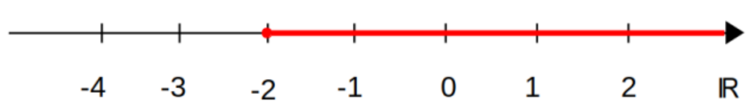
Solução: As raízes de $x+1$ e $x-3$ são $x=-1$ e $x=3$, respectivamente. Assim, vamos dividir em três casos, quando $x<-1$, $-1\leq x<3$ e $x\geq 3$:

- $x<-1$: Neste caso temos que $|x+1| = -(x+1)$ e $|x-3| = -(x-3)$. Portanto, a desigualdade dada equivale a
$$-(x+1) - [-(x-3)] \leq 2x,$$
que é equivalente a
$$-4 \leq 2x,$$
ou seja, $x \geq -2$. Portanto, se $-2 \leq x < -1$ a desigualdade dada é satisfeita.

- $-1 \leq x < 3$: Aqui temos que $|x+1| = x+1$ e $|x-3| = -(x-3)$. Logo, a desigualdade dada é equivalente a
$$(x+1) - [-(x-3)] \leq 2x,$$
que é equivalente a
$$-2 \leq 0,$$
que é uma desigualdade verdadeira. Logo, se $-1 \leq x < 3$ temos a desigualdade dada é satisfeita.

- $x \geq 3$: Neste caso temos que $|x+1| = x+1$ e $|x-3| = x-3$. Portanto, a desigualdade dada equivale a
$$(x+1) - (x-3) \leq 2x,$$
que é equivalente a
$$4 \leq 2x,$$
ou seja, $x \geq 2$. Portanto, se $x \geq 3$ a desigualdade dada é satisfeita.

Juntando os resultados obtidos em cada caso, vemos que o conjunto solução é $[-2, +\infty)$ e sua ilustração sobre a reta real segue abaixo:



Questão 2 (2,5 pontos) Avalie os limites abaixo e encontre o valor correspondente caso exista (sem usar a regra de L'Hospital). **Justifique** suas respostas.

(a) (0,5) $\lim\limits_{x\to\pi^-} x\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

(b) (0,6) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-3x^3+1}{2x^4-1}$

(c) (0,7) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{h^2+3h+3}}{h}$

(d) (0,7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|2x-1|-|2x+1|}{x}$

Solução:

(a) Quando $x\to\pi^-$, temos que $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ tende a $+\infty$ e x tende a $\pi>0$. Portanto,

$$\lim_{x\to\pi^-} x\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)=+\infty.$$

(b) Dividindo o numerador e o denominador por x^2 obtemos

$$\frac{x^4-3x^3+1}{2x^4-1}=\frac{\frac{x^4-3x^3+1}{x^4}}{\frac{2x^4-1}{x^4}}=\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^4}}{2-\frac{1}{x^4}}.$$

Usando que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ e $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^4}=0$, concluímos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^3+1}{2x^4-1}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x^4}\right)}=\frac{1}{2}.$$

(c) Multiplicando e dividindo a expressão pelo conjungado do numerador obtemos

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{h^2+3h+3}}{h}=\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{h^2+3h+3}}{h}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{h^2+3h+3}}{\sqrt{3}+\sqrt{h^2+3h+3}}\right)$$

$$=\frac{3-(h^2+3h+3)}{h\left(\sqrt{3}+\sqrt{h^2+3h+3}\right)}=\frac{-h-3}{\sqrt{3}+\sqrt{h^2+3h+3}}.$$

Portanto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{h^2+3h+3}}{h}=\frac{\lim\limits_{h\to 0}(-h-3)}{\lim\limits_{h\to 0}\left(\sqrt{3}+\sqrt{h^2+3h+3}\right)}=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(d) Para $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ temos que $|2x-1|=-(2x-1)$ e $|2x+1|=2x+1$. Logo,

$$\lim_{x\to 0}\frac{|2x-1|-|2x+1|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-(2x-1)-(2x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-4x}{x}=-4.$$

Questão 3 (1,5 ponto) Determine L para que a função f definida abaixo seja contínua em $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se} \quad x \neq 0 \\ \\ L, & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Solução: A função f será contínua em $x = 0$ se o limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ existir e for igual a $f(0) = L$. Note que para todo $x \neq 0$ vale que

$$-x^4 \leq x^4 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^4.$$

Como $\lim_{x\to 0}(-x^4) = 0$ e $\lim_{x\to 0} x^4 = 0$, então pelo Teorema do Confronto vale que

$$\lim_{x\to 0} x^4 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Logo, para que f seja contínua em $x = 0$ devemos ter $L = 0$.

Questão 4 (2,5 pontos) Calcule as assíntotas horizontais e verticais da função abaixo, se existirem. Caso não existam, **justifique** sua resposta.

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-1}.$$

Solução: Observe que para $x \neq 1$ e $x \neq -1$ temos que

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-1} = \frac{|x-1|}{(x-1)(x+1)} = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1}, \text{ se } x > 1 \\ \\ -\dfrac{1}{x+1}, \text{ se } x < 1 \text{ e } x \neq -1 \end{cases}$$

Assíntotas horizontais: Precisamos analisar o limite de $f(x)$ quando $x \to \pm\infty$:

- $x \to +\infty$: Aqui $x > 1$, portanto $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Logo,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

- $x \to -\infty$: Aqui $x < 1$, portanto $f(x) = -\dfrac{1}{x+1}$. Logo,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{1}{x+1}\right) = 0.$$

Portanto, $y = 0$ é a assíntota horizontal de f quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$.

Assíntotas verticais: Para ter-se uma assíntota vertical em $x = a$, algum dos limites laterais de f em a precisa ser ∞ ou $-\infty$. Para a função em questão, os pontos em que isso pode ocorrer são aqueles que zeram o denominador de f, ou seja, $x = -1$ e $x = 1$. Vamos analisar esses pontos separadamente:

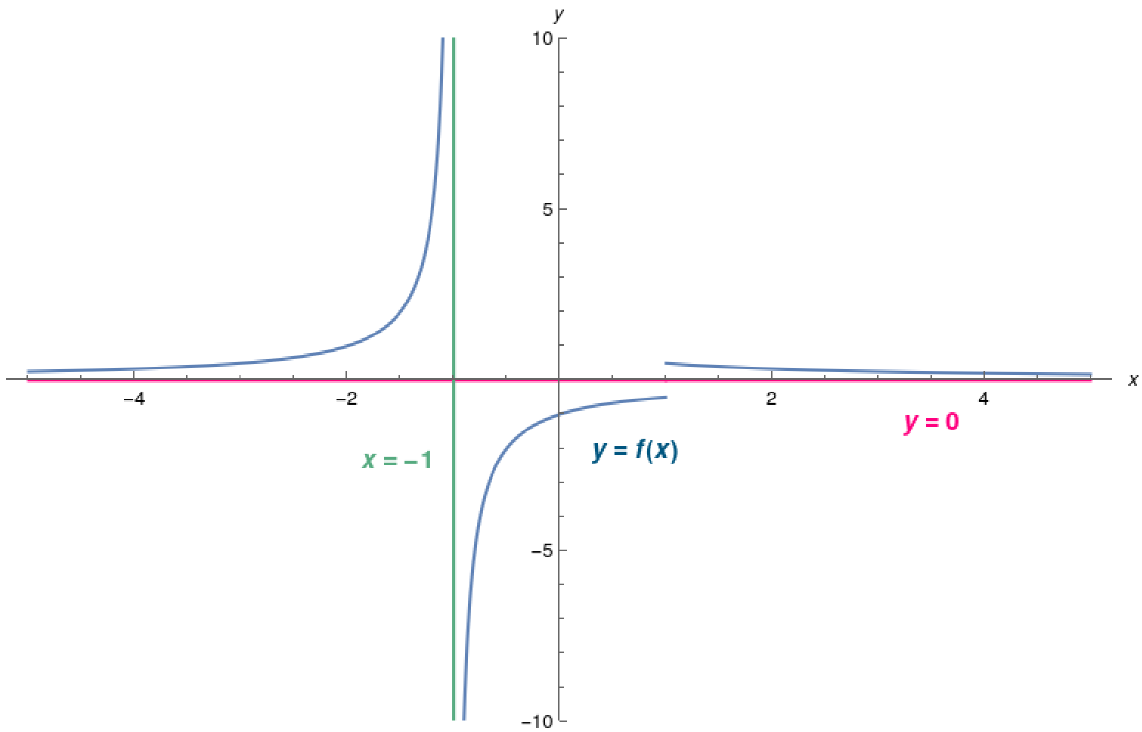
- $x = -1$: Temos que $\lim\limits_{x\to-1} |x-1| = 2$. Para $x \to -1^+$ temos que $x^2 - 1 < 0$ e para $x \to -1^-$ temos que $x^2 - 1 > 0$. Portanto, para $x \to -1^+$ temos que $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2-1} < 0$ e para $x \to -1^-$ temos que $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2-1} > 0$. Como o denominador converge a zero quando x se aproxima de -1, concluímos que

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$$

- $x = 1$: Analisando os limites laterais, obtemos

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}.$$

Portanto, apenas a reta $x = -1$ é assíntota vertical de f.



y
x
10
5
−5
−10
−4
−2
2
4
x = −1
y = f(x)
y = 0

Questão 5 (1,5 ponto) Mostre que o polinômio $p(x) = x^6 - 7x^3 + 2x^2 + 3$ possui pelo menos uma raíz real.

Solução: Note que p é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e que $p(0) = 3 > 0$ e $p(1) = -1 < 0$. Portanto, podemos aplicar o Teorema do Valor Intermediário à p no intervalo $[0, 1]$ e obter que existe $c \in (0, 1)$ tal que $p(c) = 0$.