Gabarito

MA 111 - Cálculo I - Primeiro semestre de 2022
Prova 2 - 26/05/2022 (5ª noturno)

Questão	Ponto
1	2,0
2	1,0
3	2,0
4	2,0
5	3,0
Total	10

Questão 1 (2 pontos) Calcule as derivadas das funções abaixo.

(a) $f(x) = \dfrac{\ln x + 5\cos(x)}{x^3 - \text{sen}\,(x)}$

(b) $h(x) = \text{tg}^3(6x^8 + 10x - 2)$

Solução:

(a) Aplicando a Regra do Quociente, obtemos que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\frac{\ln x + 5\cos(x)}{x^3 - \text{sen}(x)}\right]' \\
&= \frac{[\ln x + 5\cos(x)]' \cdot \left[x^3 - \text{sen}(x)\right] - [\ln x + 5\cos(x)] \cdot \left[x^3 - \text{sen}(x)\right]'}{[x^3 - \text{sen}(x)]^2} \\
&= \frac{[(\ln x)' + 5(\cos(x))'] \cdot \left[x^3 - \text{sen}\,(x)\right] - [\ln x + 5\cos(x)] \cdot \left[(x^3)' - (\text{sen}(x))'\right]}{[x^3 - \text{sen}(x)]^2} \\
&= \frac{\left[\frac{1}{x} + 5(-\text{sen}(x))\right] \cdot \left[x^3 - \text{sen}(x)\right] - [\ln x + 5\cos(x)] \cdot \left[3x^{3-1} - \cos(x)\right]}{[x^3 - \text{sen}(x)]^2} \\
&= \frac{\left[\frac{1}{x} - 5\text{sen}(x))\right] \cdot \left[x^3 - \text{sen}(x)\right] - [\ln x + 5\cos(x)] \cdot \left[3x^2 - \cos(x)\right]}{[x^3 - \text{sen}(x)]^2}
\end{aligned}$$

(b) Considere $f(x) = \text{tg}^3(x)$ e $g(x) = 6x^8 + 10x - 2$, e note que

$$h(x) = \text{tg}^3(6x^8 + 10x - 2) = \text{tg}^3(g(x)) = f(g(x)).$$

Pela Regra da Cadeia, temos que

$$h'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Como

$$f'(x) = [\text{tg}^3(x)]' = 3\text{tg}^2(x)[\text{tg}(x)]' = 3\text{tg}^2(x)\sec^2(x)$$

e

$$g'(x) = (6x^8 + 10x - 2)' = 6 \cdot 8x^{8-1} + 10 \cdot 1 - 0 = 48x^7 + 10,$$

então

$$\begin{aligned}
h'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
&= 3\text{tg}^2(g(x))\sec^2(g(x)) \cdot g'(x) \\
&= 3\text{tg}^2(6x^8 + 10x - 2)\sec^2(6x^8 + 10x - 2) \cdot (48x^7 + 10).
\end{aligned}$$

Questão 2 (1 pontos) Considere a curva definida pela equação $x^3 - y^3 + 5xy = 11$. Calcule $\frac{dy}{dx}$ e encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto $(2, 3)$.

Solução: Pela Regra da Cadeia, relembre que $(y^n)' = ny^{n-1}y' = ny'y^{n-1}$, onde y depende de x. Derivando (implicitamente) ambos os lados da igualdade dada, em relação a x, obtemos

$$\begin{aligned}
x^3 - y^3 + 5xy &= 11 \\
(x^3 - y^3 + 5xy)' &= (11)' \\
(x^3)' - (y^3)' + (5xy)' &= 0 \\
3x^2 - 3y^2y' + 5(xy)' &= 0 \\
3x^2 - 3y^2y' + 5[(x)'y + x(y')] &= 0 \\
3x^2 - 3y^2y' + 5y + 5xy' &= 0 \\
3x^2 + 5y + (5x - 3y^2)y' &= 0 \\
(5x - 3y^2)y' &= -(3x^2 + 5y) \\
y' &= -\frac{3x^2 + 5y}{5x - 3y^2} = \frac{3x^2 + 5y}{3y^2 - 5x},
\end{aligned}$$

para $x \neq \frac{3}{5}y^2$. Em $(x_0, y_0) = (2, 3)$, temos que

$$y'\big|_{(2,3)} = \frac{3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 3}{3 \cdot 3^2 - 5 \cdot 2} = \frac{27}{17}.$$

Lembremos que uma equação da reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e tem coeficiente angular m é dada por

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Em nosso caso, temos que $(x_0, y_0) = (2, 3)$ e $m = y'\big|_{(2,3)} = \frac{27}{17}$ e então uma equação da reta tangente é dada por

$$y - 3 = \frac{27}{17}(x - 2), \quad \text{ou ainda,} \quad 17y - 27x + 3 = 0.$$

Questão 3 (2 pontos) Um balão esférico está sendo enchido a uma taxa de 4 m^3/seg. Encontre a taxa de crescimento do raio do balão quando o diâmetro for igual a 10 m.

Lembre que o volume da esfera de raio r é igual a $\frac{4\pi}{3}r^3$.

Solução: Seja $V = V(t)$ o volume do balão e $r = r(t)$ o seu raio, onde t representa o tempo. Pelas informações do enunciado, sabemos que

$$V'(t) = \frac{dV}{dt} = 4 \text{ m}^3/\text{seg}.$$

Além disso, usando a fórmula do volume da espera, temos que

$$V(t) = \frac{4\pi}{3}(r(t))^3. \tag{1}$$

Derivando a igualdade (1) em relação a t e usando a Regra da Cadeia, obtemos que

$$V'(t) = r'(t)\frac{4\pi}{3}3(r(t))^{3-1} = 4\pi(r(t))^2 r'(t). \tag{2}$$

Quando o diâmetro $d = 2r(t) = 10$ m, segue que $r(t) = 5$ m. Agora, substituindo em (2), chegamos a

$$4 = 4\pi(5)^2 r'(t) \Longrightarrow r'(t) = \frac{dr}{dt} = \frac{1}{25\pi}\text{m/seg}.$$

Assim, quando o diamêtro for 10 m, a taxa de crescimento do raio do balão será $\frac{1}{25\pi}$ m/seg.

Questão 4 (2 pontos) Avalie os limites abaixo e encontre o valor correspondente, caso exista.

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(x^{1/3})}$

(b) $\lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{7^t + t^2}{7^t + t}$

Solução:

(a) Para calcular este limite, vamos utilizar a identidade $x = e^{\ln x}$ e que

$$x^{x^{\frac{1}{3}}} = e^{\ln x^{x^{\frac{1}{3}}}} = e^{x^{\frac{1}{3}} \ln x}.$$

Pela continuidade da função exponencial, podemos passar o limite para dentro de seu argumento, o que nos leva a

$$\lim_{x\to 0^+} x^{x^{\frac{1}{3}}} = e^{\left(\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{3}} \ln x\right)},$$

caso o limite no argumento exista. Portanto, precisamos calcular o limite

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{3}} \ln x = \text{"}0 \cdot (-\infty)\text{"},$$

a qual é uma forma indeterminada. Assim, aplicando a regra de L'Hospital, obtemos

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{3}} \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{\frac{-1}{3}}} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}}} = -3 \lim_{x\to 0^+} x^{-1} x^{\frac{4}{3}} = -3 \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{3}} = 0.$$

Segue que

$$\lim_{x\to 0^+} x^{x^{\frac{1}{3}}} = e^{\left(\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{3}} \ln x\right)} = e^0 = 1.$$

(b) Note que calculando o limite obtemos uma indeterminação do tipo "$\frac{\infty}{\infty}$". Aplicando a regra de L'Hospital, obtemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to +\infty} \frac{7^t + t^2}{7^t + t} &= \lim_{t\to +\infty} \frac{(7^t + t^2)'}{(7^t + t)'} = \lim_{t\to +\infty} \frac{7^t \ln 7 + 2t}{7^t \ln 7 + 1} \ (\text{"}\tfrac{\infty}{\infty}\text{", aplicando L'Hospital novamente}) \\
&= \lim_{t\to +\infty} \frac{(7^t \ln 7 + 2t)'}{(7^t \ln 7 + 1)'} = \lim_{t\to +\infty} \frac{7^t (\ln 7)^2 + 2}{7^t (\ln 7)^2} = \lim_{t\to +\infty} \left(1 + \frac{2}{7^t (\ln 7)^2}\right) = 1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{7^t + t^2}{7^t + t} = 1$$

Questão 5 (3 pontos) Seja $f(x) = (x-2)e^x$.

(a) Determine os intervalos de crescimento/descrecimento de f e os seus pontos de máximo/mínimo locais.

(b) Determine os intervalos onde f é côncava para cima/baixo e os seus pontos de inflexão.

(c) Caso existam, encontre as assíntotas horizontais e verticais de f.

(d) Esboce o gráfico de f usando (pelo menos) as informações obtidas nos itens (a), (b) e (c).

Solução:

(a) Seja $f(x) = (x-2)e^x$ e note que $D(f) = \mathbb{R}$. Temos que

$$f'(x) = (x-2)e^x + e^x = e^x(x-1).$$

Para encontrar os pontos críticos de $f(x)$, precisamos encontrar $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$f'(x) = e^x(x-1) = 0$$

Como $e^x > 0$, precisamos que

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Então, $f(x)$ tem apenas o ponto crítico $x = 1$. Para encontrarmos os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$ vamos analisar o sinal da derivada. Como $e^x > 0$, precisamos apenas analisar o sinal da reta $y = x - 1$ cuja raiz é $x = 1$. Assim, concluímos que

$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad x \in (-\infty, 1),$$

$$f'(x) > 0 \text{ para } \ x \in (1, \infty).$$

Segue que

$$f(x) \quad \text{é decrescente em } (-\infty, 1),$$

$$f(x) \quad \text{é crescente em } (1, \infty).$$

Além disso, pelo teste da primeira derivada concluímos que $f(1) = -e$ é um valor mínimo local, o qual de fato é global.

(b) Primeiramente, vamos calcular a derivada segunda. Sabemos do item anterior que $f'(x) = e^x(x-1)$. Então,

$$f''(x) = e^x(x-1) + e^x = e^x x.$$

Analisemos o sinal de $f''(x)$. Como $e^x > 0$, precisamos apenas analisar o sinal da reta $y = x$ cuja raiz é $x = 0$. Assim, concluímos que

$$f''(x) < 0 \quad \text{para} \quad x \in (-\infty, 0),$$

$$f''(x) > 0 \text{ para } \ x \in (0, \infty).$$

Segue que o gráfico de f é côncava para baixo em $(-\infty, 0)$ e é côncavo para cima em $(0, \infty)$.

Além disso, pela mudança de concavidade, $(0, f(0)) = (0, -2)$ é ponto de inflexão, de fato, o único.

(c) Note que $f(x)$ não possui assíntota vertical, pois a função é contínua em toda a reta $\mathbb{R}$ (produto de funções contínuas). Para a assíntota hotizontal, temos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-2)e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{e^{-x}} \stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

Logo, $y = 0$ (quando $x \to -\infty$) é a única assíntota horizontal da função $f(x)$.

(d) Utilizando todas as informações obtidas nos itens anteriores, temos que o gráfico de $f(x)$ é dado por