Gabarito

MA 111 - Cálculo I - Primeiro semestre de 2022
Prova 2 - 26/05/2022 (5ª vespertino)

Questão	Ponto
1	2,0
2	1,0
3	2,0
4	2,0
5	3,0
Total	10

Questão 1 (2 pontos) Calcule as derivadas das funções abaixo.

(a) $f(x) = \dfrac{5^x + x^5}{x+1}$

(b) $g(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}(x) + e^{-1/x^2}}$

Solução:

(a) Aplicando a Regra do Quociente,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[5^x + x^5]'(x+1) - (5^x + x^5)[x+1]'}{(x+1)^2} && (1)\\ &= \frac{(5^x \ln 5 + 5x^4)(x+1) - (5^x + x^5)}{(x+1)^2} && (2)\\ &= \frac{5^x(x\ln 5 + \ln 5 - 1) + 4x^5 + 5x^4}{(x+1)^2}. && (3) \end{aligned}$$

(b) Aplicando a Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(\operatorname{sen}(x) + e^{-1/x^2})^{1/3}]' && (4)\\ &= \frac{1}{3}(\operatorname{sen}(x) + e^{-1/x^2})^{-2/3}[\operatorname{sen}(x) + e^{-1/x^2}]' && (5)\\ &= \frac{1}{3}(\operatorname{sen}(x) + e^{-1/x^2})^{-2/3}\left(\cos(x) + e^{-1/x^2}\left[\frac{-1}{x^2}\right]'\right) && (6)\\ &= \frac{\left(\cos(x) + \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}\right)}{3(\operatorname{sen}(x) + e^{-1/x^2})^{2/3}}. && (7) \end{aligned}$$

Questão 2 (1 ponto) Considere a curva definida pela equação $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$. Calcule $\frac{dy}{dx}$ e encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto $(3, 2)$.

Solução: Derivando ambos os lados da igualdade dada, em relação a x, obtemos

$$4y^3\frac{dy}{dx} - 8y\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 18x.$$

Simplificando e isolando $\frac{dy}{dx}$, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 - 9x}{2y^3 - 4y}.$$

Avaliando no ponto $(x, y) = (3, 2)$, concluímos que

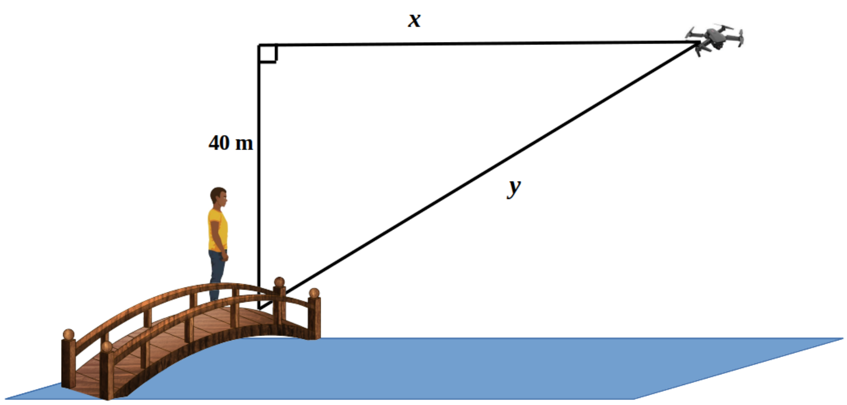
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3}{2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2} = \frac{27}{8}.$$

A reta tangente à curva no ponto $(3, 2)$ tem como coeficiente angular $\frac{dy}{dx} = \frac{27}{8}$, portanto uma equação da reta é dada por

$$y - 2 = \frac{27}{8}(x - 3).$$

Questão 3 (2 pontos) Um biólogo está em uma ponte sobre um rio e está inspecionando o rio com o auxílio de um drone. O drone mantém uma altura constante de 40 m com relação à ponte. O biólogo mantém o drone sobrevoando um trecho do rio em linha reta a uma velocidade constante de 6m/seg. Qual a taxa de variação da distância entre o biólogo e o drone quando a distância entre os dois for de 50 m?

Solução: Na figura abaixo temos a representação do problema:



As quantidades x e y variam com respeito ao tempo t e satisfazem o seguinte

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6 \text{ m/seg}, \\ \\ y^2 = x^2 + 40^2. \end{cases} \tag{8}$$

Derivando os dois lados da equação acima com respeito a t e usando regra da cadeia, obtemos

$$2y(t)\frac{dy}{dt} = 2x(t)\frac{dx}{dt}.$$

Isolando $\frac{dy}{dt}$,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x(t)}{y(t)}\frac{dx}{dt}.$$

Como $x^2(t) = y(t)^2 - 1600$ e $\frac{dx}{dt} = 6$ m/seg, temos que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{y^2(t) - 1600}}{y(t)}6,$$

e substituindo $y(t) = 50$ m, concluímos que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{6\sqrt{2500 - 1600}}{50} = \frac{18}{5} \text{ m/seg}.$$

Questão 4 (2 pontos) Avalie os limites abaixo e encontre o valor correspondente, caso exista.

(a) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}\right)$

(b) $\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{1/x^2}$

Solução

(a) O limite é uma indeterminação do tipo "$\infty-\infty$". Manipulando a expressão, podemos escrever a função como o seguinte quociente,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{tg}(x)-x}{x\operatorname{tg}(x)}$$

Note que o limite acima é a fração de duas funções diferenciáveis em zero e não nulas próximas de zero. Além disso, a aplicação direta do valor do limite na fração nos leva a uma indeterminação do tipo "$\frac{0}{0}$". Assim, podemos utilizar a Regra de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{tg}(x)-x}{x\operatorname{tg}(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sec^2(x)-1}{\operatorname{tg}(x)+x\sec^2(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{tg}^2(x)}{\operatorname{tg}(x)+x+x\operatorname{tg}^2(x)}.$$

O que nos leva novamente a um limite em que a regra de L'Hospital é aplicável, aplicando-a temos

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2\tan(x)\sec^2(x)}{\sec^2(x)+1+\operatorname{tg}^2(x)+2\operatorname{tg}(x)\sec^2(x)}=\frac{0}{2}=0.$$

Logo, $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}\right)=0.$

(b) Para calcular este limite podemos tirar vantagem da continuidade e bijetividade das funções exponencial e logarítmo para valores positivos, escrevemos

$$\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{1/x^2}=\lim_{x\to 0}e^{\ln\left((\cos(x))^{1/x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}e^{\dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}}$$

quando o limite existe.

Note que o limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$$

pode ser resolvido pela aplicação da Regra de L'Hospital duas vezes, de fato,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\tan(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sec^2(x)}{2}=-\frac{1}{2}$$

Assim temos que

$$\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{1/x^2}=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Questão 5 (3 pontos) Seja $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

(a) Determine os intervalos de crescimento/descrecimento de f e os seus pontos de máximo/mínimo locais.

(b) Determine os intervalos onde f é côncava para cima/baixo e os seus pontos de inflexão.

(c) Caso existam, encontre as assíntotas horizontais e verticais de f.

(d) Esboce o gráfico de f usando (pelo menos) as informações obtidas nos itens (a), (b) e (c).

Solução:

(a) Começamos observando que f é a composição da função $\ln x$, que é contínua para todo $x > 0$, com a função polinomial $1 + x^2$, que é contínua para todo x e sempre positiva. Logo, f é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Para analisar os intervalos de crescimento/decrescimento de f, vamos analisar o sinal de sua derivada f'. Aplicando a Regra da Cadeia, obtemos que

$$f'(x) = [\ln(1 + x^2)]' = \frac{1}{1 + x^2}(1 + x^2)' = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Portanto, $f'(0) = 0$ e $x = 0$ é o único número crítico de f. Além disso, $f'(x) > 0$ para todo $x > 0$ e $f'(x) < 0$ para todo $x < 0$. Logo, pelo Teste de Crescimento/Decrescimento, conlcuímos que f é crescente em $(0, \infty)$ e descrescente em $(-\infty, 0)$.

Para encontrar os valores de máximo/mínimo local vamos utilizar o Teste da Primeira Derivada. Como $x = 0$ é o único número crítico, basta analisar este ponto. Note que o sinal de f' muda de negativo para positivo em 0, e portanto $f(0) = 0$ é valor mínimo local.

(b) Para analisar a concavidade do gráfico de f e seus pontos de inflexão, vamos analisar a derivada de segunda ordem de f:

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)' = \frac{(2x)'(1 + x^2) - 2x(1 + x^2)'}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2(1 + x^2) - 2x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Logo, $f''(x) = 0$ se, e somente se, $2(1 - x^2) = 0$, ou seja, $x = -1$ ou $x = 1$. Além disso, $2(1 - x^2) > 0$ para todo $x \in (-1, 1)$ e $2(1 - x^2) < 0$ para todo $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Portanto, $f'' > 0$ em $(-1, 1)$ e $f'' < 0$ em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Consequentemente, pelo Teste da Concavidade, o gráfico de f é côncavo para cima em $(-1, 1)$ e côncavo para baixo em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Além disso, os pontos $(-1, f(-1)) = (-1, \ln 2)$ e $(1, f(1)) = (1, \ln 2)$ são pontos de inflexão pois a concavidade do gráfico de f muda nesses pontos e f é contínua nesses pontos.

(c) *Assíntotas Verticais:* Não existem assíntotas verticais pois f é contínua em $\mathbb{R}$.

Assíntotas Horizontais: Também não há assíntotas horizontais visto que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \ln(1 + x^2) = +\infty.$$

(d) Note que f é uma função par, já que $f(-x) = \ln((1 + (-x)^2) = \ln(1 + x^2) = f(x)$, e portanto o gráfico de f é simetrico com relação ao eixo y. O gráfico de f é dado por