Gabarito

MA 111 - Cálculo I - Primeiro semestre de 2022
Prova 2 - 27/05/2022 (6ª diurno)

Questão	Ponto
1	2,0
2	1,5
3	2,0
4	2,0
5	2,5
Total	10

Questão 1 (2 pontos) Calcule as derivadas das funções abaixo.

(a) $g(x) = \dfrac{x^7 + \operatorname{sen}(x)}{\ln(x)}$

(b) $f(x) = 7^x + \sec^3(x^2)$

Solução:

(a) Aplicando a regra do quociente,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{[x^7 + \operatorname{sen}(x)]' \ln(x) - (x^7 + \operatorname{sen}(x))[\ln(x)]'}{(\ln(x))^2} \\ &= \frac{(7x^6 + \cos(x)) \ln(x) - (x^7 + \operatorname{sen}(x)) \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} \\ &= \frac{x^7(7\ln(x) - 1) + x\cos(x)\ln(x) - \operatorname{sen}(x)}{x(\ln(x))^2} \end{aligned}$$

(b) Aplicando a Regra da Cadeia

$$\begin{aligned} f'(x) &= [7^x + \sec^3(x^2)]' \\ &= 7^x \ln(7) + 3\sec^2(x^2)[\sec(x^2)]' \\ &= 7^x \ln(7) + 3\sec^2(x^2)\sec(x^2)\operatorname{tg}(x^2)2x \\ &= 7^x \ln(7) + 6x\sec^3(x^2)\operatorname{tg}(x^2) \end{aligned}$$

Questão 2 (1,5 ponto) Encontre os dois pontos onde a curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ cruza o eixo x e mostre que as retas tangentes à curva nesses pontos são paralelas. Qual é o coeficiente angular comum dessas retas?

Solução: A curva cruza o eixo x em $y = 0$. Substituindo $y = 0$ na equação obtemos $x^2 = 7$. Logo os pontos onde a curva cruza o eixo x são $(-\sqrt{7}, 0)$ e $(\sqrt{7}, 0)$.
Derivando implicitamente a equação com relação a x, temos

$$2x + y + x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Isolando $\frac{dy}{dx}$, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y}.$$

Logo, a inclinação das retas tangentes nos pontos $(-\sqrt{7}, 0)$ e $(\sqrt{7}, 0)$ são, respectivamente,

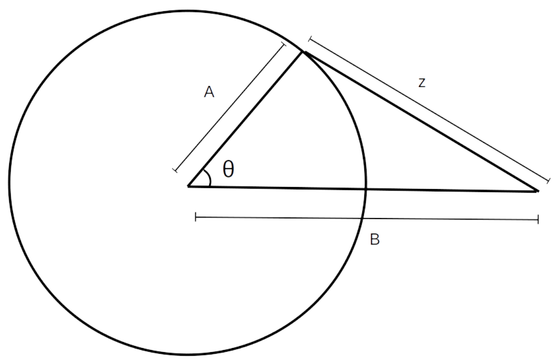
$$m_1 = \frac{-2 \cdot (-\sqrt{7}) - 0}{(-\sqrt{7}) + 2 \cdot 0} = -2 \text{ e } m_2 = \frac{-2 \cdot (\sqrt{7}) - 0}{(\sqrt{7}) + 2 \cdot 0} = -2.$$

Portanto, as retas tangentes são paralelas, com coeficiente angular igual a -2.

Questão 3 (2 pontos) Um corredor corre em uma trajetória circular de raio 100 m a uma velocidade constante de 7 m/seg. Um outro indivíduo está parado a uma distância de 200 m do centro da pista. Qual a taxa de variação da distância entre os dois quando esta distância for de 200 m?

Lembre que o comprimento do arco de um setor circular de ângulo θ (em radianos) de uma circunferência de raio r é igual a $r\theta$.

Solução: Na figura abaixo temos a representação do problema:



Usamos a lei dos cossenos para expressar a distância entre os dois indivíduos e obtemos que

$$z^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta = 100^2 + 200^2 - 2\cdot 100\cdot 200\cos\theta = 100^2(5 - 4\cos\theta)$$

$$\Rightarrow z^2 = 100^2(5 - 4\cos\theta).$$

Derivando implicitamente obtemos

$$2z\frac{dz}{dt} = 100^2(4\operatorname{sen}\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

e, portanto

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2\cdot 100^2\operatorname{sen}\theta}{z}\frac{d\theta}{dt}.$$

Como $s = r\theta$ temos

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

e como $\frac{ds}{dt} = 7$ m/seg temos que $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{7}{100}$.
Finalmente, sabendo que a distância entre eles era 200 m podemos determinar o ângulo θ, a saber:

$$200^2 = 100^2(5 - 4\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{4}.$$

Utilizando a identidade $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, obtemos que $\operatorname{sen}\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$ (o sinal depende da orientação da corrida). Portanto, assumindo, sem perda de generalidade, $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$, temos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2\cdot 100^2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}}{200}\frac{7}{100} = \frac{7\sqrt{15}}{4}\ \text{m/seg}.$$

Questão 4 (2 pontos) Avalie os limites abaixo e encontre o valor correspondente, caso exista.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x-e^x}{x^2}$

(b) $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos(x)}$

Solução:

(a) Note que $\lim\limits_{x\to 0}(1+x-e^x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$. Logo, o limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x-e^x}{x^2}$ é uma indeterminação do tipo "$\frac{0}{0}$". Vamos aplicar L'Hospital

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x-e^x)'}{(x^2)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2x} \quad \text{(indeterminação "}\tfrac{0}{0}\text{", aplicando L'Hospital)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(b) Começamos observando que $x = e^{\ln x}$, para todo $x > 0$. Portanto,

$$(\operatorname{tg}(x))^{\cos(x)} = e^{\ln\left((\operatorname{tg}(x))^{\cos(x)}\right)} = e^{\cos(x)\ln(\operatorname{tg}(x))}$$

Se provarmos que $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \cos(x)\ln(\operatorname{tg}(x)) = L$, então, pela continuidade da função exponencial, concluiremos que

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\operatorname{tg}(x))^{\cos(x)} = e^L.$$

Note que $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \cos(x)\ln(\operatorname{tg}(x))$ é uma indeterminação do tipo "$0\cdot\infty$". Reescrevendo como

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \cos(x)\ln(\operatorname{tg}(x)) = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\ln(\operatorname{tg}(x))}{\frac{1}{\cos(x)}}$$

e aplicando L'Hospital, obtemos

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\ln(\operatorname{tg}(x))}{\frac{1}{\cos(x)}} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{(\ln(\operatorname{tg}(x)))'}{\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)'} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}\sec^2(x)}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\operatorname{tg}(x))^{\cos(x)} = e^0 = 1.$$

Questão 5 (2,5 pontos) Seja $f(x) = x^5 - 5x^4$.

(a) Determine os intervalos de crescimento/descrecimento de f e os seus pontos de máximo/mínimo locais.

(b) Determine os intervalos onde f é côncava para cima/baixo e os seus pontos de inflexão.

(c) Caso existam, encontre as assíntotas horizontais e verticais de f.

(d) Esboce o gráfico de f usando (pelo menos) as informações obtidas nos itens (a), (b) e (c).

Solução:

(a) Começamos observando que f é uma função polinomial e portanto é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Para analisar os intervalos de crescimento/decrescimento de f, vamos analisar o sinal de sua derivada f':

$$f'(x) = (x^5 - 5x^4)' = 5x^4 - 20x^3 = 5x^3(x - 4).$$

Portanto, $f'(x) = 0$ se, e somente se , $x = 0$ ou $x = 4$ e estes são os únicos números críticos de f. Logo, pelo Teste de Crescimento/Decrescimento, conlcuímos que

Intervalo	$5x^3$	$x-4$	f'	f
$x<0$	$-$	$-$	$+$	crescente
$0<x<4$	$+$	$-$	$-$	decrescente
$x>4$	$+$	$+$	$+$	crescente

ou seja, f é crescente em $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ e descrescente em $(0, 4)$. Para encontrar os valores de máximo/mínimo local vamos utilizar o Teste da Primeira Derivada. Analisando os pontos críticos vemos que f' muda de positivo para negativo em 0, e portanto $f(0) = 0$ é máximo local. Por outro lado, o sinal de f' muda de negativo para positivo em 4, e portanto $f(4) = -256$ é mínimo local.

(b) Para analisar a concavidade do gráfico de f e seus pontos de inflexão, vamos analisar a derivada de segunda ordem de f:

$$f''(x) = (5x^4 - 20x^3)' = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x - 3).$$

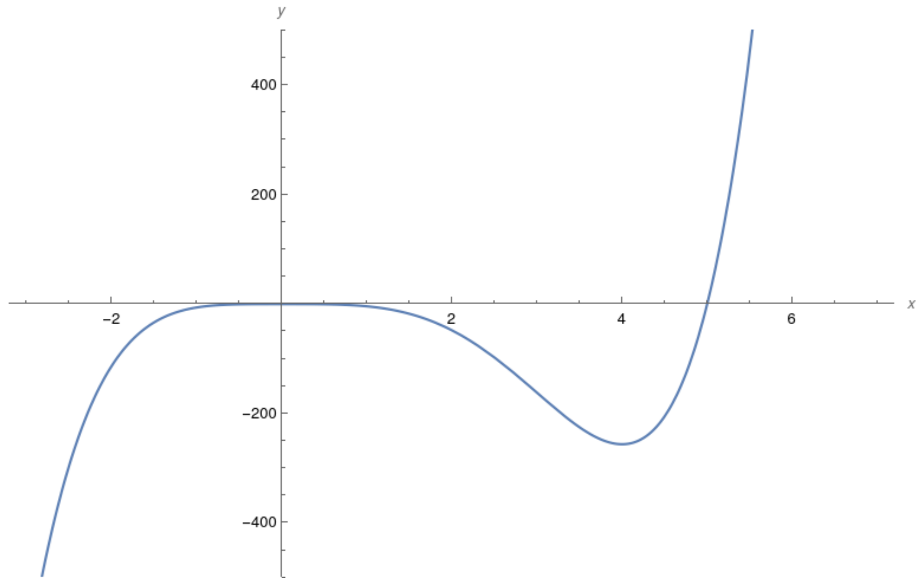
Logo, $f''(x) = 0$ se, e somente se, $x = 0$ ou $x = 3$. Além disso, como $x^2 \geq 0$ então $f'' < 0$ em $(-\infty, 3)$ e $f'' > 0$ em $(3, \infty)$. Consequentemente, pelo Teste da Concavidade, o gráfico de f é côncavo para baixo em $(-\infty, 3)$ e côncavo para cima em $(3, +\infty)$. Além disso, o ponto $(3, f(3)) = (3, -162)$ é o único ponto de inflexão pois este é o único ponto em que o gráfico de f muda de concavidade e f é contínua neste ponto.

(c) *Assíntotas Verticais:* Não existem assíntotas verticais pois f é contínua em $\mathbb{R}$.

Assíntotas Horizontais: Também não há assíntotas horizontais visto que

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x^5 - 5x^4) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4(x - 5) = \pm\infty.$$

(d) O gráfico de f é dado por



y
400
200
−200
−400
x
−2
2
4
6