Gabarito

MA 111 - Cálculo I - Primeiro semestre de 2022
Prova 2 - 27/05/2022 (6ª noturno)

Questão	Ponto
1	2,0
2	1,0
3	2,0
4	2,0
5	3,0
Total	10

Questão 1 (2 pontos) Calcule as derivadas das funções abaixo.

(a) $f(x) = \dfrac{2^x - \cos(x)}{x^2+1}$

(b) $g(x) = (x\,\text{sen}\,(2x) + \text{tg}^{\,4}(x^7))^7$

Solução:

(a) Aplicando a Regra do Quociente,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[2^x - \cos(x)]'(x^2+1) - [x^2+1]'(2^x - \cos(x))}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{(2^x \ln(2) + \text{sen}(x))(x^2+1) - 2x(2^x - \cos(x))}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2^x(\ln(2)(x^2+1) - 2x) + (x^2+1)\text{sen}(x) + 2x\cos(x)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

(b) Aplicando a Regra da Cadeia, obtemos

$$g'(x) = 7(x\text{sen}\,(2x) + \text{tg}^{\,4}(x^7))^6[x\text{sen}\,(2x) + \text{tg}^{\,4}(x^7)]'. \tag{1}$$

Pela Regra do Produto seguido da Regra da Cadeia obtemos

$$(x\text{sen}\,(2x))' = \text{sen}\,(2x) + x(\text{sen}\,(2x))' = \text{sen}\,(2x) + x\cos(2x)(2x)' = \text{sen}\,(2x) + 2x\cos(2x).$$

Aplicand duas vezes a Regra da Cadeia, temos que

$$(\text{tg}^{\,4}(x^7))' = 4\text{tg}^{\,3}(x^7)(\text{tg}(x^7))' = 4\text{tg}^{\,3}(x^7)\sec^2(x^7)(x^7)' = 28x^6\text{tg}^{\,3}(x^7)\sec^2(x^7).$$

Substituindo em (1) concluímos que

$$g'(x) = 7(x\text{sen}\,(2x) + \text{tg}^{\,4}(x^7))^6(\text{sen}\,(2x) + 2x\cos(2x) + 28x^6\text{tg}^{\,3}(x^7)\sec^2(x^7)) \tag{2}$$

Questão 2 (1 ponto) Considere a curva definida pela equação $y^2 + x^2 = y^4 - 2x$. Calcule $\frac{dy}{dx}$ e encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto $(-2, 1)$.

Solução: Derivando ambos os lados da igualdade dada em relação a x, obtemos

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 4y^3\frac{dy}{dx} - 2$$

Simplificando e isolando $\frac{dy}{dx}$, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+2}{4y^3 - 2y}$$

Avaliando no ponto $(x, y) = (-2, 1)$, concluímos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cdot (-2) + 2}{4 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1} = -1.$$

Logo, a reta tangente à curva no ponto $(-2, 1)$ tem coeficiente angular igual a $\frac{dy}{dx} = -1$. Portanto, uma equação da reta é dada por

$$y - 1 = (-1)(x - (-2)),$$

ou ainda,

$$y = -x - 1.$$

Questão 3 (2 pontos) Um petroleiro se rompeu e uma mancha de óleo está se espalhando na superfície do mar. Sabe-se que a mancha de óleo tem superfície plana e circular e que o raio da mancha está crescendo a uma taxa constante de 2 m/seg. Qual a taxa de crescimento da área da mancha quando o raio da mancha for igual a 40 m?

Solução: Denote por A a área da mancha de óleo e por r o raio da mancha. Do enunciado temos que $\frac{dr}{dt} = 2$ m/seg. Como a mancha é circular e tem raio r então sua área é dada por

$$A = \pi r^2.$$

Para calcular $\frac{dA}{dt}$ vamos derivar a equação acima com respeito a t:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}.$$

Substituindo $r = 40$ e $\frac{dr}{dt} = 2$ na equação acima, obtemos que a taxa pedida na questão é igual a

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi 40 \cdot 2 = 160\pi \text{ m}^2/\text{seg}.$$

Questão 4 (2 pontos) Avalie os limites abaixo e encontre o valor correspondente, caso exista.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}\right)$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(2x-1)^{1/(3\ln x)}$

Solução:

(a) Note que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\operatorname{sen} x}=+\infty$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$. Logo, o limite $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}\right)$ é uma indeterminação do tipo $\infty-\infty$. Vamos reescrever a função em um denominador comum

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x}.$$

Agora temos o limite de uma fração em que o numerador e o denomonador ambos convergem a zero quando $x\to 0^+$. Portanto, podemos aplicar a Regra de L'Hospital e obter que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{(x-\operatorname{sen} x)'}{(x\operatorname{sen} x)'}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x+x\cos x},\quad \text{indeterminação “}\tfrac{0}{0}\text{”, aplicamos novamente L'Hospital}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\cos x)'}{(\operatorname{sen} x+x\cos x)'}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x-x\operatorname{sen} x}=\frac{0}{2}=0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}-\frac{1}{x}\right)=0$.

(b) Começamos observando que $x=e^{\ln x}$, para todo $x>0$. Portanto,

$$(2x-1)^{1/(3\ln x)}=e^{\ln\left((2x-1)^{1/(3\ln x)}\right)}=e^{1/(3\ln x)\ln(2x-1)}$$

Se provarmos que $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2x-1)}{3\ln x}=L$, então, pela continuidade da função exponencial, concluiremos que

$$\lim_{x\to\infty}(2x-1)^{1/(3\ln x)}=e^L.$$

Note que $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2x-1)}{3\ln x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, portanto podemos aplicar L'Hospital para obter que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2x-1)}{3\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln(2x-1))'}{(3\ln x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{(2x-1)}(2x-1)'}{3\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{(2x-1)}}{\frac{3}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{(2x-1)}\frac{x}{3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3(2-1/x)} = \frac{1}{3}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\infty}(2x-1)^{1/(3\ln x)} = e^{1/3}.$$

Questão 5 (3 pontos) Seja $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

(a) Determine os intervalos de crescimento/descrecimento de f e os seus pontos de máximo/mínimo locais.

(b) Determine os intervalos onde f é côncava para cima/baixo e os seus pontos de inflexão.

(c) Caso existam, encontre as assíntotas horizontais e verticais de f.

(d) Esboce o gráfico de f usando (pelo menos) as informações obtidas nos itens (a), (b) e (c).

Solução:

(a) Começamos observando que f é uma função racional cujo denominador é sempre positivo, logo o domínio de f é $\mathbb{R}$ e f é contínua em seu domínio. Para analisar os intervalos de crescimento/decrescimento de f, vamos analisar o sinal de sua derivada f'. Aplicando a Regra do Quociente, temos que

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)'(x^2+1)-(x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

Portanto, $f'(0) = 0$ e $x = 0$ é o único número crítico de f. Além disso, $f'(x) > 0$ para todo $x > 0$ e $f'(x) < 0$ para todo $x < 0$. Logo, pelo Teste de Crescimento/Decrescimento, conlcuímos que f é crescente em $(0, \infty)$ e descrescente em $(-\infty, 0)$.

Para encontrar os valores de máximo/mínimo local vamos utilizar o Teste da Primeira Derivada. Como $x = 0$ é o único número crítico, basta analisar este ponto. Note que o sinal de f' muda de negativo para positivo em 0, e portanto $f(0) = 0$ é valor mínimo local.

(b) Para analisar a concavidade do gráfico de f e seus pontos de inflexão, vamos analisar a derivada de segunda ordem de f:

$$f''(x) = \left(\frac{4x}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{(4x)'(x^2+1)^2-4x((x^2+1)^2)'}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{4(x^2+1)^2-4x[2(x^2+1)(x^2+1)']}{(x^2+1)^4} = \frac{4(x^2+1)^2-4x[2(x^2+1)2x]}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{4(x^2+1)-16x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{4(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}.$$

Logo, $f''(x) = 0$ se, e somente se, $-3x^2+1 = 0$, ou seja, $x = -1/\sqrt{3}$ ou $x = 1/\sqrt{3}$. Além disso, $-3x^2+1 > 0$ para todo $x \in (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ e $-3x^2+1 < 0$ para todo $x \in (-\infty, -1/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}, +\infty)$. Portanto, $f'' > 0$ em $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ e $f'' < 0$ em $(-\infty, -1/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}, +\infty)$. Consequentemente, pelo Teste da Concavidade, o gráfico de f é côncavo para cima em $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ e côncavo para baixo em $(-\infty, -1/\sqrt{3}) \cup (1/\sqrt{3}, +\infty)$. Além disso, os pontos $(-1/\sqrt{3}, f(-1/\sqrt{3})) = (-1/\sqrt{3}, -1/2)$ e $(1/\sqrt{3}, f(1/\sqrt{3})) = (1/\sqrt{3}, -1/2)$ são pontos de inflexão pois a concavidade do gráfico de f muda nestes pontos e a função é contínua nestes pontos.

(c) *Assíntotas Verticais:* Não existem assíntotas verticais pois f é contínua em $\mathbb{R}$.

Assíntotas Horizontais: Analisando o limite de $f(x)$ quando $x \to \pm\infty$, observamos que tanto o numerador quanto o numerador vão para $+\infty$. Logo, podemos aplicar a Regra de L'Hospital e concluir que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^2-1)'}{(x^2+1)'} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{2x} = 1.$$

Portanto, $y = 1$ é a assíntota horizontal de f quando $x \to -\infty$ e quando $x \to +\infty$.

(d) Note que f é uma função par, já que $f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} = f(x)$, e portanto o gráfico de f é simetrico com relação ao eixo y. O gráfico de f é dado por