Gabarito

MA 111 - Cálculo I - Primeiro semestre de 2022
Prova 3 - 07/07/2022 (5ª noturno)

Questão	Ponto
1	1,0
2	3,0
3	2,0
4	1,5
5	2,5
Total	10

Questão 1 (1 ponto) Seja $h(x) = \int_1^{x^3} \sec(t^2+5t)dt$. Encontre $h(1)$ e $h'(x)$.

Solução: Observe que o integrando é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Logo, para $x = 1$, temos que

$$h(1) = \int_1^{1^3} \sec(t^2+5t)dt = \int_1^{1} \sec(t^2+5t)dt = 0,$$

pois os extremos de integração são ambos iguais a 1.
Agora, considere $g(x) = x^3$ e

$$f(x) = \int_1^{x} \sec(t^2+5t)dt.$$

Observe que

$$h(x) = \int_1^{x^3} \sec(t^2+5t)dt = \int_1^{g(x)} \sec(t^2+5t)dt = f(g(x)) \rightarrow \text{ composição.}$$

Pelo T.F.C. (Teorema Fundamental do Cálculo), sabemos que $f'(x) = \sec(x^2+5x)$. Usando a regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} h'(x) &= [f(g(x))]' \\ &= g'(x)\cdot f'(g(x)) \\ &= \left(x^3\right)' \cdot \sec[(g(x))^2 + 5(g(x))] \\ &= (3x^2)\cdot \sec[(x^3)^2 + 5(x^3)]. \\ &= (3x^2)\cdot \sec[x^6 + 5x^3]. \end{aligned}$$

Questão 2 (3 pontos) Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \frac{7x-1}{(x+2)(x-1)(x-3)}dx.$

(b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^6(x)\cos^5(x)dx.$

Solução:

(a) Vamos utilizar o método de frações parciais. Isto é, vamos encontrar $A, B, C \in \mathbb{R}$, tais que

$$\frac{7x-1}{(x+2)(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-3}.$$

Tirando o máximo múltiplo comum, obtemos a igualdade

$$\frac{7x-1}{(x+2)(x-1)(x-3)} = \frac{A(x^2-4x+3)+B(x^2-x-6)+C(x^2+x-2)}{(x+2)(x-1)(x-3)},$$

e, fazendo a igualdade de polinômios, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -4A-B+C=7 \\ 3A-6B-2C=-1 \end{cases}$$

cuja solução é $A=-1, B=-1$ e $C=2$. Portanto, podemos reescrever a igualdade inicial da forma

$$\frac{7x-1}{(x+2)(x-1)(x-3)} = -\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{7x-1}{(x+2)(x-1)(x-3)}dx &= -\int \frac{1}{x+2}dx - \int \frac{1}{x-1}dx + 2\int \frac{1}{x-3}dx \\ &= -\ln|x+2| - \ln|x-1| + 2\ln|x-3| + C, \end{aligned}$$

onde C é uma constante.

(b) Note que a potência do $\cos(x)$ é ímpar. Logo, faremos a mudança $u = \operatorname{sen}(x)$. Temos que $du = \cos(x)dx$. Lembre a relação trigonométrica $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^6(x)\cos^5(x)dx &= \int \operatorname{sen}^6(x)\cos^4(x)\cos(x)dx = \int \operatorname{sen}^6(x)(\cos^2(x))^2\cos(x)dx \\ &= \int \operatorname{sen}^6(x)(1-\operatorname{sen}^2(x))^2\cos(x)dx = \int u^6(1-u^2)^2du \\ &= \int u^6(1-2u^2+u^4)du = \int (u^6-2u^8+u^{10})du \\ &= \frac{u^7}{7} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^{11}}{11} + C \\ &= \frac{\operatorname{sen}^7(x)}{7} - 2\frac{\operatorname{sen}^9(x)}{9} + \frac{\operatorname{sen}^{11}(x)}{11} + C. \end{aligned}$$

Questão 3 (2 pontos) Calcule a integral

$$\int (x + x^3)\ln(1 + x^2)dx.$$

Solução: Primeiro, vamos fazer a substituição $t = 1 + x^2$. Obtemos assim $dt = 2xdx$ e

$$\int (x + x^3)\ln(1 + x^2)dx = \frac{1}{2}\int t\ln t dt.$$

Para calcular $\int t \ln t dt$ utilizaremos a fórmula de integração por partes

$$\int f'(t)g(t)dt = f(t)g(t) - \int f(t)g'(t)dt,$$

com $f'(t) = t$ e $g(t) = \ln t$. Logo, $f(t) = t^2/2$ e $g'(t) = 1/t$. Portanto, temos que

$$\int t\ln t dt = \frac{t^2}{2}\ln t - \int \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}dt = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{1}{2}\int t dt = \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4} + K,$$

onde K é uma constante qualquer. Assim, obtemos que

$$\int (x + x^3)\ln(1 + x^2)dx = \frac{1}{2}\int t\ln t dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4} + C\right) = \frac{t^2(2\ln t - 1)}{8} + C,$$

onde $C = K/2$. Substituindo $t = 1 + x^2$, concluímos que

$$\int (x + x^3)\ln(1 + x^2)dx = \frac{(1 + x^2)^2(2\ln(1 + x^2) - 1)}{8} + C.$$

Questão 4 (1,5 pontos) Avalie a convergência da integral imprópria

$$\int_3^\infty \frac{1}{(x-1)^{1/4}}dx.$$

Solução: Temos por definição de integral imprópria que

$$\int_3^\infty \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{4}}}dx = \lim_{a\to\infty}\int_3^a \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{4}}}dx,$$

fazendo a mudança de variável $u = x - 1$ temos que $du = dx$. E se $x = 3$, temos $u = 2$ e se $x = a$, então $u = a - 1$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_3^\infty \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{4}}}dx &= \lim_{a\to\infty}\int_3^a \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{4}}}dx = \lim_{a\to\infty}\int_2^{a-1} u^{-\frac{1}{4}}dx = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{4}{3}u^{\frac{3}{4}}\right]\Big|_2^{a-1} \\ &= \frac{4}{3}\lim_{a\to\infty}((a-1)^{\frac{3}{4}} - 2^{\frac{3}{4}}),\end{aligned}$$

como $\frac{3}{4} > 0$, temos que

$$\lim_{a\to\infty}(a-1)^{\frac{3}{4}} = \infty.$$

Portanto, concluímos que a integral imprópria diverge para o infinito ∞, isto é,

$$\int_3^\infty \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{4}}}dx = \frac{4}{3}\lim_{a\to\infty}((a-1)^{\frac{3}{4}} - 2^{\frac{3}{4}}) = \infty.$$

Questão 5 (2,5 pontos) Seja R a região limitada pelas curvas $y = x$ e $y = x^4$.

(a) Esboce R e calcule a sua área.

(b) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo x.

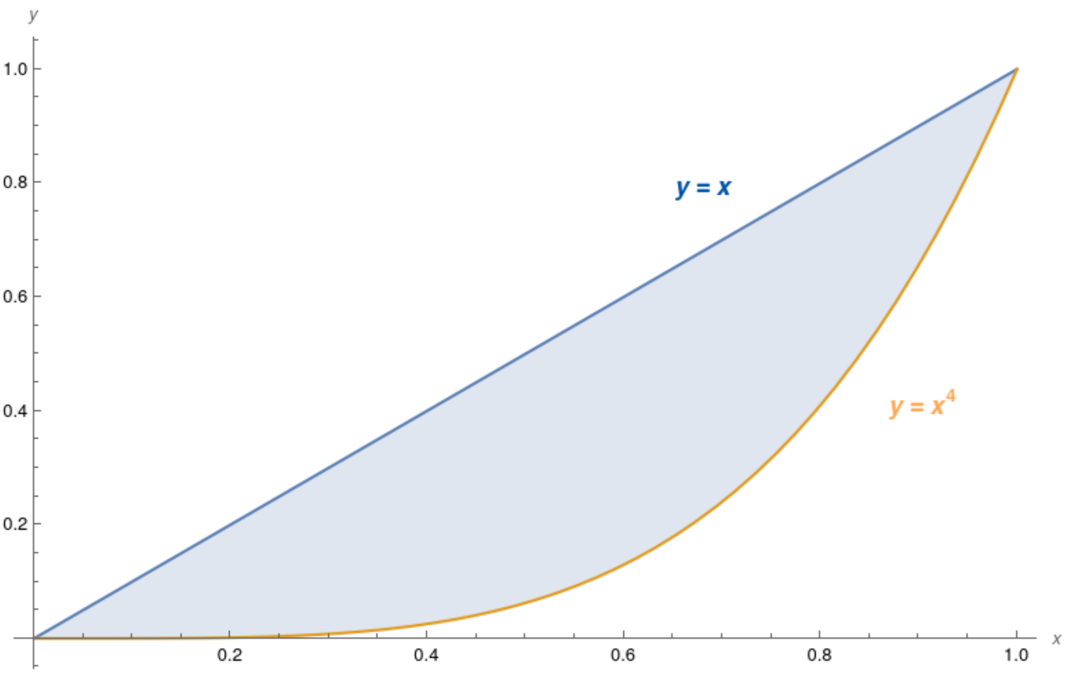
Solução:

(a) Primeiramente, note que os pontos de interseção das curvas são $x = 0$ e $x = 1$. Além disso,

$$x^4 \leq x, \quad \forall\, x \in [0, 1].$$

Como ambas as funções são contínuas em $\mathbb{R}$, então em particular no intervalo $[0, 1]$.

O esboço da região é dado por:



Logo, a área da região compreendida entre as duas curvas é dada por

$$A = \int_0^1 (x - x^4)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}.$$

(b) Primeiramente note que o sólido de revolução obtido com a rotação das duas curvas tem o formato de um anel, onde a função x representa o raio externo e a funçã o x^4 representa o raio interno.

Portanto, temos que

$$V = \int_0^1 (\pi(x)^2 - \pi(x^4)^2)dx = \int_0^1 \pi[x^2 - x^8]dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^9}{9}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{2\pi}{9}.$$