Gabarito

MA 111 - Cálculo I - Primeiro semestre de 2022
Prova 3 - 07/07/2022 (5ª vespertino)

Questão	Ponto
1	1,0
2	3,0
3	2,0
4	1,5
5	2,5
Total	10

Questão 1 (1 ponto) Seja $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \sqrt[3]{t^4+1}dt$. Encontre $g'(x)$.

Solução: Observe que o integrando $f(t) = \sqrt[3]{t^4+1}$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_{\sqrt{x}}^{x} \sqrt[3]{t^4+1}dt = F(x) - F(\sqrt{x})$$

onde F é qualquer primitiva de f, ou seja, $F'(t) = f(t)$. Portanto, pela Regra da Cadeia

$$g'(x) = (F(x) - F(\sqrt{x}))' = F'(x) - F'(\sqrt{x})(\sqrt{x})' = F'(x) - F'(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Substituindo $F'(t) = f(t) = \sqrt[3]{t^4+1}$, concluímos que

$$g'(x) = \sqrt[3]{x^4+1} - \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{2\sqrt{x}}.$$

Questão 2 (3 pontos) Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}dx.$

Solução:

(a) Fazendo a substituição $u = x+1$ obtemos $du = dx$ e

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{u-1}{\sqrt{u}}du = \int (u^{1/2} - u^{-1/2})du = \frac{u^{3/2}}{3/2} - \frac{u^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{u}\left(\frac{u}{3} - 1\right) + C$$

Substituindo $u = x+1$, obtemos

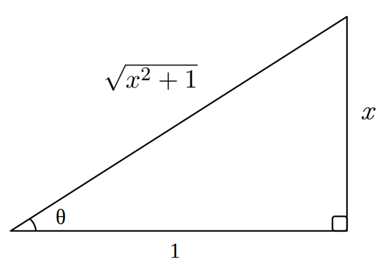
$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = 2\sqrt{x+1}\left(\frac{x+1}{3} - 1\right) + C = 2\sqrt{x+1}\left(\frac{x-2}{3}\right) + C.$$

(b) Ao fazer a substituição trigonométrica $x = \tan(\theta)$ temos que $dx = \sec^2(\theta)d\theta$ e

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}dx = \int \frac{1}{(\tan^2(\theta)+1)^{3/2}}\sec^2(\theta)d\theta = \int \frac{1}{(\sec^2(\theta))^{3/2}}\sec^2(\theta)d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\sec(\theta)}d\theta = \int \cos(\theta)d\theta = \text{sen}(\theta) + C.$$

Usamos o triângulo abaixo para obter que $\text{sen}(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.



Portanto,

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}dx = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

Questão 3 (2 pontos) Calcule a integral

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx.$$

Solução: Faça a substituição $t = e^x$, assim $e^x dx = dt$ e temos

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx = \int \frac{1}{t^2+3t+2}dt.$$

A ideia agora é utilizar o método das frações parciais. Para isso, primeiro temos que fatorar o denominador. Por Bhaskara, as raízes do denominador são $x = -1$ e $x = -2$, e portanto $t^2 + 3t + 2 = (t + 1)(t + 2)$.
Agora, temos que encontrar A e B tais que

$$\frac{1}{t^2+3t+2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}.$$

A equação acima é satisfeita se e somente se

$$At + 2A + tB + B = 1$$

donde obtemos as equações

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B = 1 \end{cases}$$

cuja solução é $A = 1$ e $B = -1$. Assim temos que

$$\int \frac{1}{t^2+3t+2}dt = \int \frac{1}{t+1}dt + \int \frac{-1}{t+2}dt = \ln|t+1| - \ln|t+2| + C = \ln\left|\frac{t+1}{t+2}\right| + C$$

onde C é uma constante arbitrária. Voltando a variável original temos que

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}dx = \ln\left(\frac{e^x+1}{e^x+2}\right) + C.$$

Questão 4 (1,5 ponto) Avalie a convergência da integral imprópria

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx.$$

Solução: Por definição de integral imprópria, temos que

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x}dx.$$

Para todo $b > 0$, fazendo integração por partes, temos que

$$\int_0^b xe^{-x}dx = x(-1)e^{-x}\Big|_0^b - \int_0^b (-1)e^{-x}dx = -be^{-b} + \int_0^b e^{-x}dx$$
$$= -be^{-b} + (-1)e^{-x}\Big|_0^b = -be^{-b} + (-1)(e^{-b} - 1) = -(b+1)e^{-b} + 1.$$

Agora, vamos calcular o limite quando $b \to \infty$

$$\lim_{b\to\infty}(b+1)e^{-b} = \lim_{b\to\infty}\frac{b+1}{e^b} = \lim_{b\to\infty}\frac{(b+1)'}{(e^b)'} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^b} = 0.$$

Portanto,

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}(-(b+1)e^{-b} + 1) = 1.$$

Logo, a integral imprópria é convergente e é igual a 1.

Questão 5 (2,5 pontos) Seja R a região limitada pelas curvas $y = 2x^2$ e $y = 3 - x^2$.

(a) Esboce R e calcule a sua área.

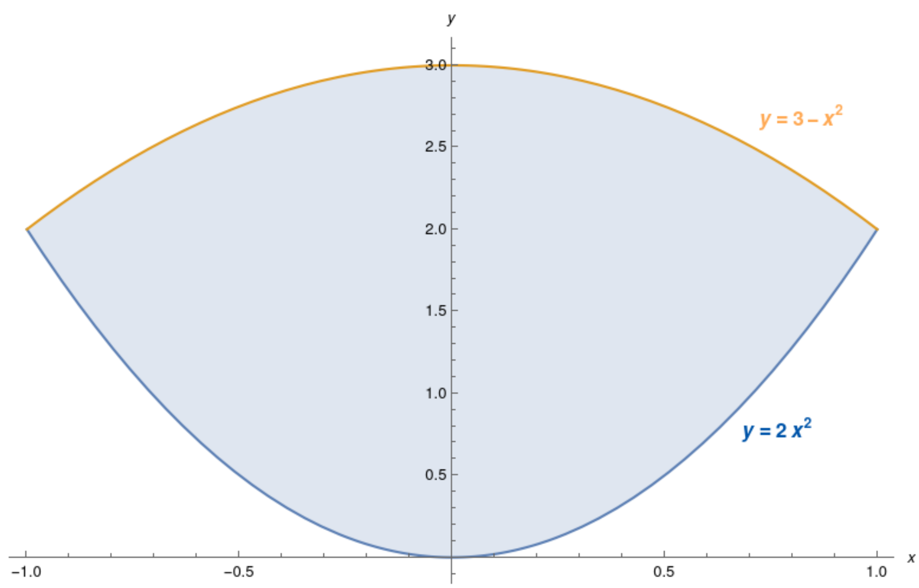
(b) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo x.

Solução:

(a) Para fazer o esboço de R precisamos calcular os pontos de interseção das curvas $y = 2x^2$ e $y = 3 - x^2$:

$$2x^2 = 3 - x^2 \iff 3x^2 = 3 \iff x = -1 \text{ ou } x = 1.$$

Note que para $x \in [-1, 1]$ temos que $x^2 \leq 1$ e portanto $2x^2 \leq 2 \leq 3 - x^2$. Portanto, o esboço da região é



e sua área é dada por

$$A = \int_{-1}^{1} (3 - x^2 - 2x^2)dx = 3\int_{-1}^{1} (1 - x^2)dx = 3\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = 4.$$

Logo, a área da região R é igual a 4.

(b) Note que as seções transversais $S(x)$ do sólido de revolução obtido pela rotação de R em torno do eixo x tem o formato de um anel, com raio externo $3 - x^2$ e raio interno $2x^2$. Portanto, temos que

$$V = \int_{-1}^{1} (\pi(3 - x^2)^2 - \pi(2x^2)^2)dx = \int_{-1}^{1} \pi(9 - 6x^2 - 3x^4)dx$$

$$= \pi\left(9x - 6\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{64\pi}{5}.$$

Portanto, $V = \dfrac{64\pi}{5}$.