Gabarito

MA 111 - Cálculo I - Primeiro semestre de 2022
Prova 3 - 08/07/2022 (6ª diurno)

Questão	Ponto
1	1,0
2	3,0
3	2,0
4	1,5
5	2,5
Total	10

Questão 1 (1 pontos) Seja $g(x) = \int_x^{1-3x^2} e^{\cos(t)}dt$. Encontre $g'(x)$.

Solução: Observe que o integrando $f(t) = e^{\cos(t)}$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_x^{1-3x^2} e^{\cos(t)}dt = F(1-3x^2) - F(x)$$

onde F é qualquer primitiva de f, ou seja, $F'(t) = f(t)$. Portanto, pela Regra da Cadeia

$$g'(x) = (F(1-3x^2) - F(x))' = F'(1-3x^2)(1-3x^2)' - F'(x) = (-6x)F'(1-3x^2) - F'(x)$$

Substituindo $F'(t) = f(t) = e^{\cos(t)}$, concluímos que

$$g'(x) = -6xe^{\cos(1-3x^2)} - e^{\cos(x)}.$$

Questão 2 (3 pontos) Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x-x^3}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\operatorname{sen}(\theta)}}d\theta$

Solução:

(a) Vamos utilizar o método de frações parciais. Para isso, primeiro observe que o denominador pode ser reescrito como $x - x^3 = x(1-x^2) = x(1-x)(1+x)$. Portanto, devemos encontrar $A, B, C \in \mathbb{R}$, tais que

$$\frac{3x+1}{x-x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C}{1+x} \iff 3x+1 = A(1-x)(1+x) + Bx(1+x) + Cx(1-x)$$

$$\iff 3x+1 = x^2(-A+B-C) + x(B+C) + A$$

donde obtemos as equações

$$\begin{cases} -A+B-C=0 \\ B+C=3 \\ A=1 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema obtemos $A=1$, $B=2$ e $C=1$. Assim temos que

$$\int \frac{3x+1}{x-x^3}dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx = \ln|x| - 2\ln|1-x| + \ln|1+x| + C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

(b) Fazendo a susbstituição $u = \operatorname{sen}(\theta)$ temos que $du = \cos(\theta)d\theta$ e

$$\int \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\operatorname{sen}(\theta)}}d\theta = \int \frac{1}{\sqrt{u}}du = \frac{u^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{\operatorname{sen}(\theta)} + C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

Questão 3 (2 pontos) Calcule a integral

$$\int x(\ln x)^2 dx.$$

Solução: Vamos utilizar integração por partes, com $u = (\ln x)^2$ e $dv = xdx$, portanto $du = \dfrac{2\ln x}{x}dx$ e $v = \dfrac{x^2}{2}$. Logo,

$$\int x(\ln x)^2 dx = (\ln x)^2 \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{2\ln x}{x}dx = \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \int x\ln x dx. \tag{1}$$

Faremos novamente integração por partes, porém agora $u = \ln x$ e $dv = x$, portanto $du = \dfrac{1}{x}dx$ e $v = \dfrac{x^2}{2}$. Logo,

$$\int x\ln x dx = \ln x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \left(\frac{x^2}{4} + C\right),$$

onde C é uma constante arbitrária.
Substituindo em (1), concluímos que

$$\int x(\ln x)^2 dx = \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \frac{x^2\ln x}{2} + \frac{x^2}{4} + C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

Questão 4 (1,5 pontos) Avalie a convergência da integral imprópria

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx.$$

Solução: Note que o integrando é uma função descontínua em $x = 0$ e contínua em $(0, \pi^2/4]$. Logo, por definição de integral imprópria, temos que

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx.$$

Para todo $a > 0$, fazendo a substituição $u = \sqrt{x}$ temos que $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ e

$$\int_a^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \int_{\sqrt{a}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u) 2du = 2\text{sen}(u)\Big|_{\sqrt{a}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 - 2\text{sen}(\sqrt{a}).$$

Agora, vamos calcular o limite quando $a \to 0^+$:

$$\lim_{a \to 0^+} \int_a^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to 0^+} (2 - 2\text{sen}(\sqrt{a})) = 2 - 2\text{sen}(0) = 2.$$

Logo, a integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ é convergente e seu valor é 2.

Questão 5 (2,5 pontos) Seja R a região limitada pelas curvas $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = x$.

(a) Esboce R e calcule a sua área.

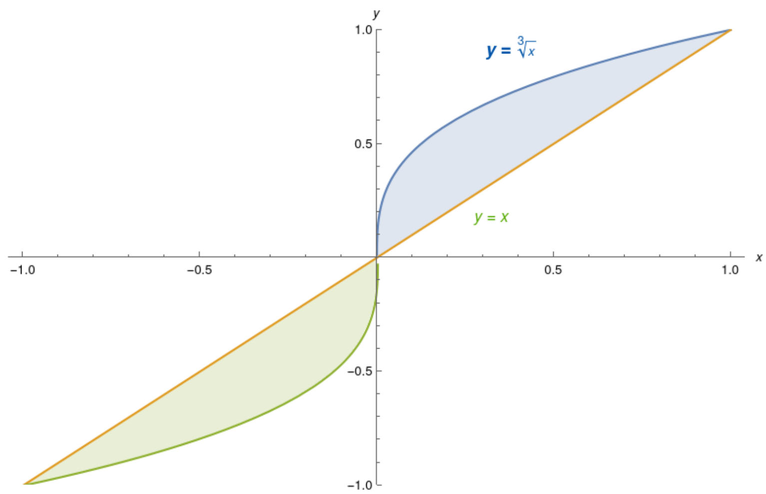
(b) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo x.

Solução:

(a) Para fazer o esboço de R precisamos calcular os pontos de interseção das curvas $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = x$:

$$\sqrt[3]{x} = x \iff \sqrt[3]{x}(1 - x^{2}/3) = 0 \text{ ou } x = \pm 1.$$

Note que $x \leq \sqrt[3]{x}$ para $x \in [0,1]$ e $\sqrt[3]{x} \leq x$ para $x \in [-1,0]$. Portanto, o esboço da região é



e sua área é dada por

$$A = \int_{-1}^{0} \left(x - \sqrt[3]{x}\right) dx + \int_{0}^{1} \left(\sqrt[3]{x} - x\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{2}.$$

Logo, a área da região R é igual a $\frac{1}{2}$.

(b) Note que as seções transversais $S(x)$ do sólido de revolução obtido pela rotação de R em torno do eixo x tem o formato de um anel, com raio externo $\sqrt[3]{x}$ e raio interno x. Portanto, temos que

$$V = \int_{-1}^{1} \left(\pi(\sqrt[3]{x})^2 - \pi x^2\right) dx = \int_{-1}^{1} \pi \left(x^{2/3} - x^2\right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{8\pi}{15}.$$

Portanto, $V = \dfrac{8\pi}{15}$.