Gabarito

UNICAMP

MA 111 - Cálculo I - Primeiro semestre de 2022
Prova 3 - 08/07/2022 (6ª noturno)

IMECC

Questão	Ponto
1	1,0
2	3,0
3	2,0
4	1,5
5	2,5
Total	10

Questão 1 (1 pontos) Seja $h(x) = \displaystyle\int_{1-3x}^{x^2} \cos(e^t + 1)dt$. Encontre $h'(x)$.

Solução: Observe que o integrando $f(t) = \cos(e^t + 1)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_{1-3x}^{x^2} \cos(e^t + 1)dt = F(x^2) - F(1 - 3x)$$

onde F é qualquer primitiva de f, ou seja, $F'(t) = f(t)$. Portanto, pela Regra da Cadeia

$$h'(x) = (F(x^2) - F(1 - 3x))' = F'(x^2)(x^2)' - F'(1 - 3x)(1 - 3x)' = 2xF'(x^2) + 3F'(1 - 3x).$$

Substituindo $F'(t) = f(t) = \cos(e^t + 1)$, concluímos que

$$h'(x) = 2x\cos(e^{x^2} + 1) + 3\cos(e^{1-3x} + 1).$$

Questão 2 (3 pontos) Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int (1 + e^{\cos(x)})\text{sen}(x)dx$

(b) $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx$.

Solução:

(a) Fazendo a susbstituição $u = \cos(x)$ temos que $du = (-1)\text{sen}(x)dx$ e

$$\int (1 + e^{\cos(x)})\text{sen}(x)dx = \int (1 + e^u)(-1)du = -u - e^u + C = -\cos(x) - e^{\cos(x)} + C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

(b) Vamos utilizar integração por partes, com $u = \ln x$ e $dv = x^{1/3}dx$, portanto $du = \frac{1}{x}dx$ e $v = \frac{3x^{4/3}}{4}$. Logo,

$$\int \sqrt[3]{x} \ln x dx = \ln x \frac{3x^{4/3}}{4} - \int \frac{3x^{4/3}}{4} \frac{1}{x} dx = \frac{3}{4} x^{4/3} \ln x - \frac{3}{4} \int x^{1/3} dx$$

$$= \frac{3}{4} x^{4/3} \ln x - \frac{9x^{4/3}}{16} + C = \frac{3}{16} x^{4/3}(4 \ln x - 3) + C.$$

Questão 3 (2 pontos) Calcule a integral

$$\int \frac{\ln x}{x((\ln x)^2 + 2\ln x - 3)}dx.$$

Solução: Primeiro faremos a substituição $u = \ln x$, assim $du = \frac{1}{x}dx$ e

$$\int \frac{\ln x}{x((\ln x)^2 + 2\ln x - 3)}dx = \int \frac{u}{u^2 + 2u - 3}du$$

Agora vamos utiliziar o método de frações parciais. Para isso, primeiro vamos fatorar o denominador. Por Bhaskara temos que as raízes de $u^2 + 2u - 3$ são $u = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$, ou seja, $u = 1$ e $u = -3$. Assim, o denominador pode ser reescrito como $u^2 + 2u - 3 = (u - 1)(u + 3)$. Portanto, devemos encontrar $A, B \in \mathbb{R}$, tais que

$$\frac{u}{u^2 + 2u - 3} = \frac{A}{u - 1} + \frac{B}{u + 3} \iff u = A(u + 3) + B(u - 1)$$

$$\iff u = u(A + B) + 3A - B$$

donde obtemos as equações

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 3A - B = 0 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema obtemos $A = 1/4$ e $B = 3/4$. Assim temos que

$$\int \frac{u}{u^2 + 2u - 3} = \int \left(\frac{1}{4(u - 1)} + \frac{3}{4(u + 3)}\right) du = \frac{1}{4}\ln|u - 1| + \frac{3}{4}\ln|u + 3| + C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Substituindo $u = \ln x$ concluímos que

$$\int \frac{\ln x}{x((\ln x)^2 + 2\ln x - 3)}dx = \frac{1}{4}\ln|\ln x - 1| + \frac{3}{4}\ln|\ln x + 3| + C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

Questão 4 (1,5 pontos) Avalie a convergência da integral imprópria

$$\int_1^3 \frac{1}{(2-x)^{4/3}}dx.$$

Solução: Note que o integrando tem uma descontinuidade em $x = 2$. Logo, temos que analisar as integrais impróprias

$$\int_1^2 \frac{1}{(2-x)^{4/3}}dx \text{ e } \int_2^3 \frac{1}{(2-x)^{4/3}}dx$$

Vamos começar analisando a primeira. Por definição,

$$\int_1^2 \frac{1}{(2-x)^{4/3}}dx = \lim_{b\to 2^-} \int_1^b \frac{1}{(2-x)^{4/3}}dx.$$

Para todo $1 < b < 2$, fazendo a substituição $u = 2 - x$ obtemos que $du = (-1)dx$ e

$$\int_1^b \frac{1}{(2-x)^{4/3}}dx = \int_1^{2-b} \frac{1}{u^{4/3}}(-1)du = \int_{2-b}^1 u^{-4/3}du = \left.\frac{u^{-4/3+1}}{-4/3+1}\right|_{2-b}^1 = -3 + \frac{3}{\sqrt[3]{2-b}}$$

Agora, vamos calcular o limite quando $b \to 2^-$:

$$\lim_{b\to 2^-} \int_1^b \frac{1}{(2-x)^{4/3}}dx = \lim_{b\to 2^-} \left(-3 + \frac{3}{\sqrt[3]{2-b}}\right) = +\infty.$$

Logo, a integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(2-x)^{4/3}}dx$ diverge e consequentemente a integral $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(2-x)^{4/3}}dx$ também diverge.

Questão 5 (2,5 pontos) Seja R a região limitada pelas curvas $y = 2x^2 + x$ e $y = 3x$.

(a) Esboce R e calcule a sua área.

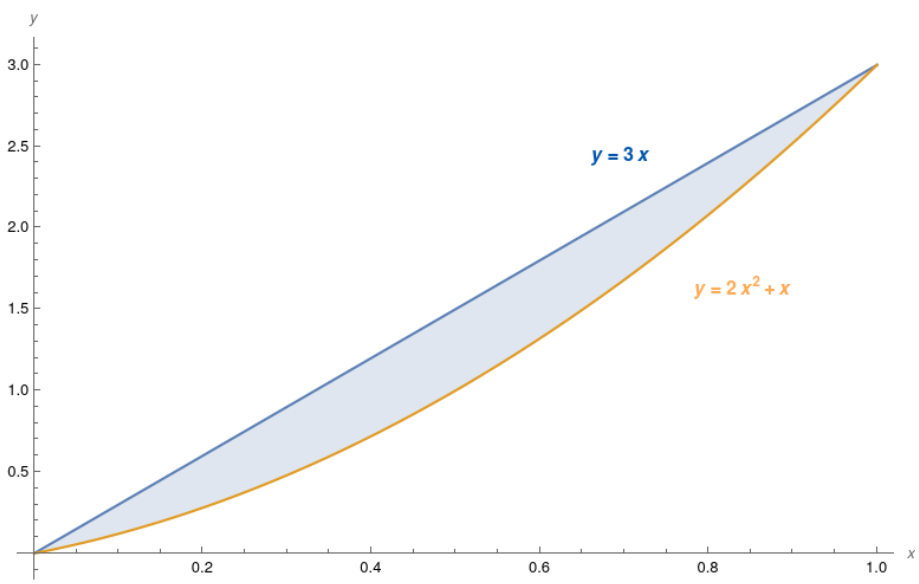
(b) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de R em torno do eixo x.

Solução:

(a) Para fazer o esboço de R precisamos calcular os pontos de interseção das curvas $y = 2x^2 + x$ e $y = 3x$:

$$2x^2 + x = 3x \iff 2x^2 - 2x = 0 \iff 2x(x-1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Note que para $x \in [0, 1]$ temos que $2x^2 + x \leq 3x$. Portanto, o esboço da região é



e sua área é dada por

$$A = \int_0^1 (3x - (2x^2 + x))dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)dx = \left(2\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Logo, a área da região R é igual a $1/3$.

(b) Note que as seções transversais $S(x)$ do sólido de revolução obtido pela rotação de R em torno do eixo x tem o formato de um anel, com raio externo $3x$ e raio interno $2x^2 + x$. Portanto, temos que

$$V = \int_0^1 \left(\pi(3x)^2 - \pi(2x^2 + x)^2\right) dx = \int_0^1 4\pi(-x^4 - x^3 + 2x^2)dx$$

$$= 4\pi \left(-\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{13\pi}{15}.$$

Portanto, $V = \dfrac{13\pi}{15}$.